Mathématiques avec Python — préparation à l'oral

Exercice 1. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers en posant $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = a_n, \quad a_{2n} = a_n + a_{n-1}.$$

a. Écrire une fonction `a(n)` récursive qui renvoie la valeur de a_n. On vérifiera que a_{534} vaut 39.

b. Écrire une fonction `tab_a(n)` qui renvoie la liste $[a_0, \dots, a_n]$. On demande une complexité en $\mathcal{O}(n)$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $\mathrm{A}_n : \theta \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ sur $[-\pi, 3\pi]$.

Tracer le graphe de A_n pour tout n dans $[\![1, 10]\!]$ puis pour tout n dans $[\![100, 110]\!]$.

Exercice 3. On note Γ la courbe tridimensionnelle paramétrée par

$$x(t) = (1+\cos(t))\cos(t), \quad y(t) = (1+\cos(t))\sin(t), \quad z(t) = 4\sin(t/2), \quad t \in [0, 4\pi].$$

a. Représenter cette courbe ainsi que ses projetés orthogonaux sur les plans $(\mathrm{O}xy)$, $(\mathrm{O}yz)$ et $(\mathrm{O}zx)$.

b. Calculer la longueur de cette courbe.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est noté χ_n.

a. Écrire une fonction en Python qui renvoie la matrice A_n.

b. Écrire une fonction en Python qui renvoie la plus grande valeur propre de A_n.

Exercice 5. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, on considère la matrice $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que les valeurs propres de $\mathrm{M}(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

a. Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant t en entrée et renvoie le triplet $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$.

b. Représenter graphiquement les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur le segment $[-3, 3]$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

a. Écrire une fonction en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{E}_n$.

b. Utiliser cette fonction pour créer de telles matrices et afficher les valeurs propres. Commenter le signe de ces valeurs propres.

Exercice 7. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Représenter graphiquement f et conjecturer la nature des points critiques. Prouver enfin les résultats conjecturés.

Exercice 8. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(2\sqrt{x}\,\sin(t))\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \leqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\,\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Représenter la fonction φ sur $[-3,5]$ et sur $[-1000,0]$.

Exercice 9. Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des X_k. On définit

$$\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_k.$$

Dans cette question, la loi des X_k est $\mathcal{B}(50, 1/50)$ et celle de N est $\mathcal{P}(1/12)$.
Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire Y. Réaliser une série de 100000 expériences. Estimer la moyenne et l'écart-type de Y.

Exercice 10. a. Écrire une fonction `legendre(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang n, défini par

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2^n n!}((\mathrm{X}^2-1)^n)^{(n)}.$$

b. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\mathrm{XP}_n - \frac{n}{n+1}\mathrm{P}_{n-1}.$$

Exercice 11. On note α l'unique[1] l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\alpha} \mathrm{sh}^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Déterminer un encadrement de α de longueur 10^{-5}.

b. Écrire une fonction d'en-tête `suite(n)` qui renvoie une valeur approchée de $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_n$.

Exercice 12. On considère des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (u_n^2) + (v_n)^2 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + (v_n)^2 + (u_n)^2.$$

a. Représenter sous forme de polygone les dix premiers termes de la suite (u_n, v_n) en effectuant les choix suivants pour le couple (u_0, v_0).

$$(1/4, 1/5),\ (-1/4, 1/5),\ (1/4, -1/5),\ (1, 1/5),\ (1/4, 1).$$

b. Conjecturer la convergence/divergence de la suite $((u_n, v_n))_{n\geqslant 0}$ selon la condition initiale.

Exercice 13. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale, qui valent alternativement -1 et 1 en commençant par 1.

a. Écrire une fonction qui à n associe la matrice A_n.

b. Déterminer les valeurs propres de A_n et la dimension de ses espaces propres pour tout $n \in [\![2, 8]\!]$.

c. En fonction de n, trouver un minorant de la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres multiples.

d. Calculer les coefficients diagonaux de $(\mathrm{A}_n)^2$ ainsi que sa trace. En déduire toutes les valeurs propres de A_n et la dimension des espaces propres associés.

---

1. Il faut bien sûr savoir justifier précisément l'existence et l'unicité de cette solution.