Ex 6. Unicité sous réserve d'existence.

Si P_n et Q_n sont deux sol, $\forall x \in \mathbb{C}^*$ $P_n\left(x+\frac{1}{x}\right) = Q_n\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Quand x décrit $\mathbb{C}^*$, $x+\frac{1}{x}$ décrit une inf de valeurs donc $P_n = Q_n$.

Exist par réc $\quad P_0 = 2$ et $P_1 = X$ conviennent.

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Il suffit donc de poser $P_{n+1} = X P_n - P_{n-1}$

Remarque. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = 2\cos(\theta)$ donc

$$P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta).$$

On écrit a sous la forme p/q ; $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. $\quad P_{2q}(2\cos(a\pi)) = 2\cos(2p\pi) = 2$.

$2\cos(a\pi)$ est une racine de $P_{2q} - 2$.

Fait. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n est unitaire, de degré n, à coefficients entiers. (réc)

c'est vrai aussi pour $P_{2q} - 2$.

on s'écrit sous la forme $X^{2q} + \sum_{i=0}^{2q-1} \alpha_i X^i$.

On écrit $2\cos(a\pi)$ sous la forme s/t, $\left| \begin{array}{l} s \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{N}^* \\ \mathrm{pgcd}(s,t) = 1 \end{array}\right.$

$$\left(\frac{s}{t}\right)^{2q} + \sum_{i=0}^{2q-1} \alpha_i \left(\frac{s}{t}\right)^i = 0. \quad \leftarrow \times t^{2q}$$

$$s^{2q} = -\sum_{i=0}^{2q-1} \alpha_i s^i t^{2q-i} \quad \text{divisible par } t$$

donc t divise s^{2q}. Sauf que $\mathrm{pgcd}(s,t) = 1$

donc $t = 1$ donc $2\cos(a\pi) = s \in \mathbb{Z}$.

Ex 7. Solutions immédiates : 0 et les X^k.

Analyse : Soit P une sol non nulle.

On l'écrit sous la forme $\left| \begin{array}{l} \alpha X^d + Q \\ \deg(Q) < d \end{array} \right.$

$$\underbrace{\alpha X^{2d} + Q(X^2)}_{P(X^2)} = \underbrace{\alpha^2 X^{2d} + 2\alpha X^d Q(X) + Q(X)^2}_{P(X)^2}$$

Déjà : $\alpha \overset{\neq 0}{=} \alpha^2$ donc $\alpha = 1$.

Hyp : $Q \neq 0$. On pose $c = \deg(Q)$.

$$\underbrace{Q(X^2)}_{\deg = 2c} = \underbrace{2\alpha X^d Q(X)}_{\deg = c+d} \underbrace{+Q(X)^2}_{\deg = 2c}$$

donc $c + d \leq 2c$ donc $d \leq c$: c'est faux.

Il reste $Q = X^d$. Synthèse déjà faite.

Ex 8 - Hyp. $X^2 + aX + b = (X - e^{it})(X - e^{iu})$.

Alors $a = -(e^{it} + e^{iu}) = -e^{i\frac{t+u}{2}} \, 2\cos\left(\frac{t-u}{2}\right)$

et $b = e^{i(t+u)}$ donc $|a| \leq 2$ et $|b| = 1$ et $\bar{a}^2 b \in [0, +\infty[$

Synth. On suppose que $|a| \leq 2$ ~~et~~, $|b| = 1$ et $\bar{a}^2 b \in [0, +\infty[$

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tq $a = -e^{i\theta} \times 2\cos(\varphi)$.

~~On procède~~ 1^{er} cas : $a \neq 0$. $b = \frac{\bar{a}^2 b}{\bar{a}^2} = \underbrace{\bar{a}^2 b}_{\geq 0} \times \underbrace{\frac{1}{4\cos^2(\varphi)}}_{\geq 0} e^{2i\theta}$

Or $|b| = 1$ donc $b = e^{2i\theta}$. On pose $\left\{ \begin{array}{l} t = \theta + \varphi \\ u = \theta - \varphi \end{array} \right.$ de sorte que $\theta = \frac{t+u}{2}$, $\varphi = \frac{t-u}{2}$

Alors $X^2 + aX + b = (X - e^{it})(X - e^{iu})$.

2^e cas : ~~$a \neq 0$~~ $a = 0$ Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tq $b = \cancel{e^{i\omega}} - e^{i\omega}$ $X^2 + aX + b = (X - e^{i\omega/2})(X + e^{i\omega/2})$