Mercredi 18 mai 2022

Ex 9. $(X-z_k)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}(-z_k)^{n-\ell} X^\ell$.

La matrice de $\left((X-z_k)^n\right)_{0\le k\le n}$ dans la base can $(1,\dots,X^n)$ est $\left(\binom{n}{\ell}(-z_k)^{n-\ell}\right)_{0\le k,\ell\le n}$. Son déterminant vaut

$$\pm\left(\prod_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\right) V(-z_0,\dots,-z_n).$$

C'est non nul.

Ex 11 : a - Hyp 1 - Si un tel u existe, le th du rang donne $\dim(F)+\dim(G)=n$.

Hyp 2 - On suppose que $\underbrace{\dim(F)}_{\text{noté } r}+\dim(G)=n$. ~~Il existe une famille $(e_1,\dots,e_r)$ de $\mathbb{R}^n$ tq~~

Soit $(f_1,\dots,f_r)$ une base de F. ~~Cette famille est libre :~~

~~$\forall i\in[\![1,r]\!]$, $u(e_i)=f_i$.~~ (n'importe quoi)

Dém [~~Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^r$ tq $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i=0$ donc les λ_i sont nuls~~]

~~On applique~~ u : $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i f_i=0$

~~On la complète Soit $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de~~

Soit $(e_{r+1},\dots,e_n)$ une base de G. On la complète en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. On définit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\begin{cases} u(e_1)=f_1 & u(e_{r+1})=0 \\ \vdots & \vdots \\ u(e_r)=f_r & u(e_n)=0 \end{cases}$$

Alors $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_r,0,\dots,0)=F$.

$$\begin{cases} G=\mathrm{Vect}(e_{r+1},\dots,e_n)\subset \mathrm{Ker}(u) \\ \dim(\mathrm{Ker}(u))=n-\mathrm{rg}(u)=n-\dim(F)=\dim(G) \end{cases}$$

donc $G=\mathrm{Ker}(u)$.

Ex 11 - b. On pose $\left.\begin{array}{l} f_1 = (1,-1,0) \\ f_2 = (0,1,-1) \end{array}\right\}$ base de F

$f_3 = (0,0,1)$

puis $\underbrace{g_3 = (1,-1,0)}_{\text{base de } G}$, $g_2 = (0,1,0)$, $g_1 = (0,0,1)$

$\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ $\longleftarrow$ bases de $\mathbb{R}^3$.

On définit u par $\begin{cases} u(g_1) = f_1 \\ u(g_2) = f_2 \\ u(g_3) = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$u(e_1) = u(g_2 + g_3) = f_2 = (0,1,-1)$

$u(e_2) = u(g_2) = f_2 = (0,1,-1)$

$u(e_3) = u(g_1) = f_1 = (1,-1,0)$

La matrice canoniquement associée à u est $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ce n'est pas la seule solution.

Ex 19. But : trouver une base (P_1, P_2, P_3) de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ tq

$AP_1 = 0$, $AP_2 = 0$, $AP_3 = P_2$.

On choisit $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{bmatrix}$ et $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Déjà, $AP_3 = P_2$.

$$AP_2 = \begin{bmatrix} 1 + j^2 + j^4 \\ j + j^3 + j^2 \\ j^2 + j + j^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On prend enfin $P_1 = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, de sorte que $AP_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Posons : $P = \left[P_1 | P_2 | P_3 \right]$. Alors $P = \begin{bmatrix} -j & 1 & 1 \\ 1 & j & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(P) \underset{\text{dév } C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & j \\ 0 & j^2 \end{vmatrix} = j^2 \neq 0$ donc P est inv donc

(P_1, P_2, P_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$.

Ex 21. $A(B - A - I_n) = I_n$ donc A est inv et

$A^{-1} = B - A - I_n$ donc $(B - A - I_n)A = I_n$ donc

$BA = A^2 + A + I_n = AB$.

Ex 25. Pivot par blocs.

$$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}}_{\det = 1} = \begin{bmatrix} I_n + AB & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

~~dét = 1~~

$\det(M) = \det(I_n + AB)$.

Ex 13. $p \circ q \in \mathcal{L}(E)$ $(p\circ q)^2 = p\circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$

$= p \circ q$

$p\circ q$ est un proj

$\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p\circ q)$ et $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q\circ p) = \mathrm{Ker}(p\circ q)$

donc $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p\circ q)$

Réc. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p\circ q)$. $\left.\begin{array}{l} q(x) \in \mathrm{Ker}(p) \\ x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q) \end{array}\right\}$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

$\mathrm{Ker}(p\circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

~~Soit $x \in \mathrm{Im}(p\circ q)$.~~ $\mathrm{Im}(p\circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$

$\mathrm{Im}(q\circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$

donc $\mathrm{Im}(p\circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Alors $q(x) = x$

et $p(q(x)) = p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(p\circ q)$.

$\boxed{\mathrm{Im}(p\circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)}$.

noté r

$p + q - p\circ q = \mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id} - p)\circ(\mathrm{Id} - q)$

proj qui commutent

donc c'est aussi un proj.

Son noyau est $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Im}((\mathrm{Id}-p)\circ(\mathrm{Id}-q))$

$= \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-q)$

$= \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

$\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Ker}((\mathrm{Id}-p)\circ(\mathrm{Id}-q)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-p) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-q)$

$= \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$