Jeudi 19 mai 2022

Ex 64. a. $R_n =$ Somme de Riemann d'ordre n de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0,1]$

donc $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \Big[(1+t)\ln(1+t) - t\Big]_{t=0}^{t=1}$
$= 2\ln(2) - 1.$

b. $S_n = n^n \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n} = n^n \exp(R_n)$ or $\exp(R_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{4}{e}$

donc $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4}{e} n^n}$

Ex 65. $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ | $\forall x>0,\ f(x) - 1 = \frac{1}{2}\ \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$

$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x}\right).$

Ainsi : $\forall n \geq 1,\quad u_n \geq 1.$

$\forall n \geq 1,\quad u_{n+1} \leq u_n$. $(u_n)_{n\geq 1}$ est décr, minorée par 1.

Elle conv vers une lim $\ell \geq 1$. $f(\ell) = \ell$ donc $\ell^2 = 1$ donc $\ell = 1$

Ex 67. Variation de la constante : $y_{n+1} = n y_n$ donne $\forall n \geq 1\ \ y_n = (n-1)!\, y_1$

On pose $q_n = \frac{x_n}{(n-1)!}$ et on obtient : $\forall n \geq 1,\ q_{n+1} = q_n - \cancel{\frac{n^2}{(n-1)!}}\frac{n^2}{n!} = q_n - \frac{n}{(n-1)!}$

Par télescopage : $q_n - q_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (q_{k+1} - q_k) = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k-1)!}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\ell+1}{\ell!} = 2e.$

$q_n = q_1 - 2e + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!}$ donc $x_n = (n-1)!\left[x_1 - 2e\right] + (n-1)! \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!}$

$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{\ell=n-1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}$

$0 \leq \sum_{\ell=n-1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\ell=n-1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{\ell!} \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\ell-(n-1)} \Big/ \sum_{\ell=n-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\ell-(n-1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n-2}$

$(n-1)! \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!} = O(n)$ | $x_n = O(n) \Leftrightarrow x_1 = 2e.$

Ex 73. $\forall x \geq e,\ f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \geq 0$ (nul seulement si $x = e$)

$\begin{cases} f \text{ est str cr sur } [e, +\infty[\\ f(e) = e \\ f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ f \text{ est cont} \end{cases}$ donc f réalise une bij de $[e, +\infty[$ sur $[e, +\infty[$

$\dfrac{f^{-1}(y)}{\ln(f^{-1}(y))} = y$ donc $\ln(f^{-1}(y)) - \underbrace{\ln(\ln(f^{-1}(y)))}_{= o(\ln(f^{-1}(y)))} = \ln(y)$

donc $\ln(f^{-1}(y)) \sim \ln(y)$ puis $\boxed{f^{-1}(y) \sim y \ln(y)}$

Ex 74. a. DSE : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{n!}(2n-1) \geq 1 > 0$ donc f est str cr.

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, $\xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ f est cont. bij tout ça.

c. f est impaire donc f^{-1} aussi.
Taylor-Young donne l'ex du $DL_5(0)$

$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5)$. $f^{-1}(f(x)) = x$.

$f(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$ donc

$f^{-1}(f(x)) = ax + \frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{6}x^5 + b\left[x^3 + \frac{3}{2}x^5\right] + cx^5 + o(x^5)$

unicité du DL :
$a = 1,\ \frac{a}{2} + b = 0,\ \frac{a}{6} + \frac{3}{2}b + c = 0$ donc $b = -1/2$,

$c = -\frac{a}{6} - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{-2+9}{12} = \frac{7}{12}$.

$\boxed{f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{12}y^5 + o(y^5)}$.

Ex 78. $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x+1)$

est str cr donc il y a au plus une sol.

$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -3\pi/2 \\ f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3\pi/2 \\ f \text{ est cont} \end{cases}$ $\quad \frac{\pi}{2} \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ donc il y a une sol.

On la note a.

$[1+i(a-1)][1+ia][1+i(a+1)]$ ← admet $\frac{\pi}{2}$ pour arg donc c'est un imag pur.

$= [1+ia][2-a^2+2ia] = [2-3a^2] + i[\text{whatever}]$

donc $a = \pm\sqrt{2/3}$. $\quad f(0) = 0 < f(a)$ donc $a > 0$

donc $a = \sqrt{2/3}$.

Ex 79. ~~Soit f une sol : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x (f(t) - f(x))\,dt = 0$.~~

Analyse. ~~Soit $R > 0$. Il existe $s \in [0,R]$ tq $f(s) = \max_{[0,R]} f$.~~

Soit f une sol. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x f'(x) + f(x) = f(x)$ donc $f'(x) = 0$.

f est cont sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ puis sur $\mathbb{R}$ par cont.

Synth. Les fonc const sont sol.

Ex 72. $\int_0^1 \underbrace{(f(t) - t)}_{\text{noté } g(t)}\,dt = 0$.

g est cont. Il est impossible d'avoir $g > 0$ partout sur $[0,1]$ ~~ou $g < 0$~~

ou $g < 0$ sur $[0,1]$

donc g change de signe donc g s'annule en au moins un point donc f a au moins un pt fixe.