~~Samedi~~ vendredi 20 mai 2022

Ex 145.

~~X~~ f est une sol ssi tout élément de l'image de f est un pt fixe de f.

Si $\# f([\![1,n]\!]) = k$, on a $\binom{n}{k}$ choix pour les k pts fixes de f puis k^{n-k} choix pour les images des autres éléments de $[\![1,n]\!]$. La réponse est donc $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$.

Ex 150. $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$[T=n] = \left(\begin{array}{c} [X_1=1, \dots, X_{n-1}=1] \\ \cup \\ [X_1=0, X_2=1, \dots, X_{n-1}=1] \\ \cup \\ \vdots \\ \cup \\ [X_{1}=0, \dots, X_{n-1}=0] \end{array} \right) \cap [X_n=1, X_{n+1}=0]$$

← union disj

mais indép : $\mathbb{P}(T=n) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k (1-p)^{n-1-k} \times p(1-p)$.

Si $p = 1/2$,

$$\mathbb{P}(T=n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4} = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Si $p \neq 1/2$,

$$\mathbb{P}(T=n) = \frac{p^n - (1-p)^n}{p-(1-p)} \times p(1-p).$$

Q subs : $\mathbb{E}(T)$?

Ex 157. Si X est ind ~~de~~ avec X, alors $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x, X=x) = \mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(X=x)^2$

donc $\mathbb{P}(X=x) = 0$ ou 1.

Loi dégénérée. + réciproque

Ex 152. $Z = X + Y$. $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

Soit $n \geq 2$. $[Z = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [X = k, Y = n-k]$

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} q (1-q)^{n-k-1}$$

Somme géom de raison $\frac{1-p}{1-q}$.

1er cas : $p = q$: $\mathbb{P}(Z = n) = (n-1) p^2 (1-p)^{n-2}$

2e cas : $p \neq q$: $\mathbb{P}(Z = n) = pq \times \sum_{\ell=0}^{n-2} (1-p)^{\ell} (1-q)^{n-2-\ell}$

$$= pq \times \frac{(1-p)^{n-1} - (1-q)^{n-1}}{(1-p) - (1-q)}$$

Ex 159. La σ-add donne que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ conv

donc $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ex 160. $\mathbb{P}(Y = y, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y, f(X) = y)$

$= \mathbb{P}(Y = y)\, \mathbb{P}(f(X) = y)$ ind

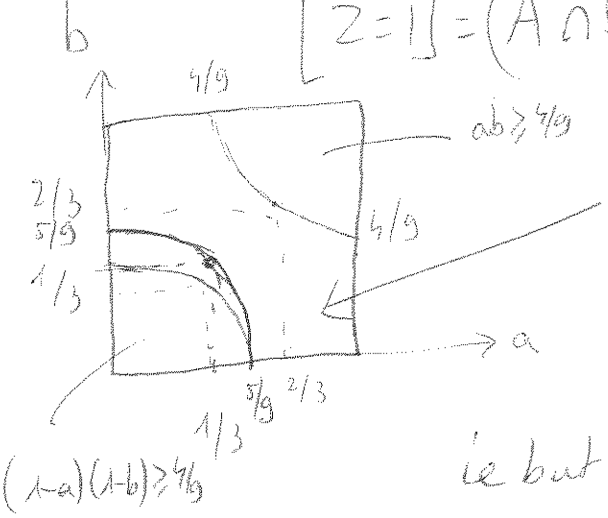
donc $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ ou 1.

Y suit une loi dégénérée.

Ex 161. $[Z=0] = \overline{A}\cap\overline{B}$, $\mathbb{P}(Z=0) = (1-a)(1-b)$

$[Z=2] = A\cap B$, $\mathbb{P}(Z=2) = ab$.

$[Z=1] = (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = a(1-b)+b(1-a)$.



Notons U cette région, définie par $\{(a,b)\in[0,1]^2 ;\ ab\le 4/9,\ (1-a)(1-b)\le 4/9\}$

Posons $f:(a,b)\longmapsto a(1-b)+b(1-a)$

le but est de montrer que $\min_U f \geq 4/9$.

f ~~admet un~~ est cont sur U, qui est fermé et borné donc f a un max et un min sur U.

On note $V = \{(a,b)\in]0,1[^2 ;\ ab<4/9,\ (1-a)(1-b)<\frac{4}{9}\}$ - c'est un ouvert.

$\vec{\nabla} f(a,b) = (1-2b,\ 1-2a)$. Unique pt critique $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (il est dans V).

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$.

Le min de f sur U est ~~soit~~ en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ou en un pt de $U\setminus V$.

Étude sur $U\setminus V$.

~~Remarque : $f(0,4/9) =$~~

Soit $a\in[5/9,1]$. $f(a,0) = a \geq \frac{5}{9} > \frac{4}{9}$.

Soit $b\in[0,4/9]$. $f(1,b) = 1-b \geq 5/9 > 4/9$.

Soit $a\in[4/9,1]$. $f\left(a,\frac{4}{9a}\right) = a\left(1-\frac{4}{9a}\right)+\frac{4}{9a}(1-a) = a+\frac{4}{9a}-\frac{8}{9}$ noté $\varphi(a)$.

$\forall a\in\left[\frac{4}{9},1\right]$, $\varphi'(a) = 1-\frac{4}{9a^2} = \frac{9a^2-4}{9a^2}$.

a	$4/9$		$2/3$		1
$\varphi(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\min_{[4/9,1]}\varphi = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$ (idem ailleurs par symétrie)

Finalement, $\min_U f = 4/9$ et ça conclut l'affaire.