Mines-Ponts

Exercice 1. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$\mathrm{A}_\alpha = \left\{ \omega \in \Omega \ ; \ \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha \, \mathrm{X}_n(\omega)} \text{ converge} \right\}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_\alpha)$ sous l'hypothèse $\alpha > 1$.

2. Dans la suite, on suppose que α est un élément de $]0,1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2.a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, prouver la majoration

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (\mathrm{X}_n > n^\beta) \right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}.$$

2.b. Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta - 1}$

2.c. En déduire la limite de $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (\mathrm{X}_n > n^\beta) \right)$ quand k tend vers $+\infty$.

2.d. En déduire la valeur de

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (\mathrm{X}_n > n^\beta) \right).$$

3. On note B_β l'ensemble des ω de Ω pour lesquels l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{X}_n(\omega) > n^\beta\}$ est fini.

3.a. Justifier l'égalité

$$\mathrm{B}_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (\mathrm{X}_n \leqslant n^\beta).$$

3.b. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_\beta) = 1$.

3.c. Pour tout $\omega \in \mathrm{B}_\beta$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha \, \mathrm{X}_n(\omega)}$ converge.

3.d. Quelle est la probabilité de A_α ?

Exercice 2. Pour toute suite u de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^p)$.

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. Un joueur tire ces $2n$ boules les unes après les autres sans remise. Il gagne un euro à chaque fois qu'il tire une boule de couleur différente de la boule précédente (et rien dans les autres cas).

a. Quelle est la probabilité que ce joueur gagne au moins trois euros ?

b. Pour tout k dans $[\![1, 2n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au gain du joueur au k-ième tirage. Déterminer la loi de X_k.

c. Calculer la moyenne du gain total du joueur.

Exercice 4. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$. Trouver son signe.

Exercice 5. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{a_i}{a_j} + \dfrac{a_j}{a_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 6. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifiant l'identité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{A} \times \mathrm{X}(t).$$

a. Prouver que la fonction $t \mapsto ||\mathrm{X}(t)||$ est constante.

b. Prouver que la matrice A n'est pas inversible.

c. Soit U un élément non nul de Ker(A). Prouver que la fonction $t \mapsto \mathrm{X}(t) \times \mathrm{U}^{\mathrm{T}}$ est constante.

d. Qu'en déduit-on sur la trajectoire de la courbe X ?

Exercice 7. On considère la matrice $\mathrm{A} = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer dét(A) et A^{-1}.

Exercice 8. On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ l'application $f : (x,y) \mapsto (x+y, x^7 - y^7)$.

Montrer que f est une bijection.

Exercice 9. a. Pour tout entier n suffisamment grand, prouver que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ possède deux solutions distinctes strictement positives, notées u_n et v_n avec la condition $u_n < v_n$.

b. Montrer que u_n tend vers une certaine limite ℓ à préciser puis trouver un équivalent de $u_n - \ell$.

c. Trouver la limite de v_n puis un équivalent.

d. Poursuivre le développement asymptotique de v_n.

Exercice 10. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément deux jetons. On note X le numéro du plus petit et Y le numéro du plus grand.

a. Déterminer les lois de X et de Y.

b. Calculer l'espérance de Y et celle de Y^2.

c. Calculer Cov(X, Y).

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x) e_k.$$

a. Montrer que f est un endomorphisme symétrique. Est-il injectif ? surjectif ?

b. À quelle condition est-ce un projecteur ?

Exercice 12. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
On pose

$$\mathrm{N} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{X}_n = 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{2\mathrm{N}} \mathrm{X}_k.$$

Déterminer la loi de N puis celle de Y.

Exercice 13. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^p)$.

3. Expliciter $\Delta^p(u)$.

Exercice 14. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, à valeurs strictement positives. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^1 f(t)^a \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser la valeur de $\mathrm{I}'(0)$.

2. Trouver la limite de $\mathrm{I}(a)^{1/a}$ quand a tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Exercice 15. Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & + & te^t \\ y' & = & 8x & + & y & + & \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$

Exercice 16. Soit a dans $]0, 1[$. Soit $b > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = i, \mathrm{Y} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{\mathrm{e}^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j. \end{cases}$$

a. Déterminer les lois de X et de Y. Calculer leurs espérances.

b. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

c. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Déterminer la loi de Z. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 17. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

a. Dans cette question, l'espace vectoriel E est supposé euclidien et l'endomorphisme u est supposé symétrique. Montrer que $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable par u.

b. Dans cette question, l'endomorphisme u est supposé diagonalisable. Montrer que F possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 18. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + t^4}}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et étudier ses variations.

c. Déterminer la limite de f en 0^+.

Exercice 19. Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x) e_k.$$

a. Montrer que f est un endomorphisme symétrique. Injectif ? Surjectif ?

b. À quelle condition est-ce un projecteur ?

Centrale-Supélec

Exercice 20. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose que A est diagonalisable. Prouver que B est diagonalisable.

Exercice 21. On pose $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $u_n \leqslant n!$.

b. Montrer qu'il est possible de poser $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} x^n$ pour tout x dans $]-1, 1[$.

c. Au moyen d'une équation différentielle, obtenir une expression de $f(x)$.

Exercice 22. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$.

a. Montrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives. La plus grande d'entre elles est notée λ.

b. Pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer la majoration $||\mathrm{AX}|| \leqslant \sqrt{\lambda}\, ||\mathrm{X}||$. Cas d'égalité ?

c. Qu'obtient-on dans le cas $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Exercice 23. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\, \mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer F' puis obtenir une expression de F.

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit p un projecteur de E. On pose $\mathrm{V} = \mathrm{Im}(p)$.
Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et que V est stable par u.

On pose $q = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

a. Montrer que q est un projecteur.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(q)$ est un supplémentaire de V dans E stable par u.

Exercice 25. On considère trois variables aléatoires $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que A et B suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On suppose que C suit la loi uniforme sur

$$\left\{ \frac{k}{n} \ ; \ k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note Q_ω le polynôme aléatoire $\mathrm{C}(\omega)\mathrm{X}^2 + \mathrm{B}(\omega)\mathrm{X} + \mathrm{A}(\omega)$.

Pour tout polynôme P, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}')^2$.

Calculer $\mathbb{P}(\varphi(\mathrm{Q}_\omega) = \mathrm{Q}_\omega)$.

Exercice 26. Soit $\alpha > 0$.

a. Montrer que la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

a. On suppose que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Montrer que sa limite simple est encore un élément de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi/2]$ puis sa convergence uniforme.

Exercice 29. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{A}^k) = n.$$

Montrer l'égalité $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1\}$.

Exercice 30. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2 + x}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire une expression de f.

X-ESPCI

Exercice 31. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $\mathrm{P}(n)$ est un élément de $\mathbb{Z}$.
Prouver que les coefficients de P sont rationnels.

Exercice 32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels stricts de E.
Peut-on avoir $\mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{E}$?

Exercice 33. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$, l'espace vectoriel des matrices symétriques complexes.

a. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{N}$.

b. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 34. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que $x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 35. Trouver un équivalent de $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 36. Existe-t-il une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum (u_n)^3$ diverge ?

Exercice 37. On considère l'ensemble $\mathrm{A} = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f(0)=1,\ f(1)=2\right\}$.

Déterminer $\inf \left\{\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t\ ;\ f \in \mathrm{A}\right\}$.

Exercice 38. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - 2y = 0$.

Exercice 39. On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir la séquence `pile-face`. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués.

Calculer l'espérance de X.

ENS

Exercice 40. On définit une application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ en posant

$$\phi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(1), \ldots, \mathrm{P}(n+1)).$$

Montrer l'égalité $\phi(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]) = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i-1} v_i = v_{n+1}\right\}$.

Exercice 41. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver que l'éguation $\tan(x) = x$ possède une unique solution dans $\mathrm{I}_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Cette solution est notée x_n.

Obtenir un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Exercice 42. Soit $a > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \sqrt{x}(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

sur l'intervalle $]n, +\infty[$.

Montrer que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $]n, +\infty[$, atteint en un unique point, noté x_n. Trouver ensuite un équivalent de x_n.

CC-INP

Exercice 43. **Exercice majeur.**

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $]-1,0[$ et en appliquant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. On définit la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Étudier les variations de f. En déduire que l'intervalle $]-1,0[$ est stable par f.

2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $]-1,0[$ et en déduire que cette suite converge. Préciser sa limite.

3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$. Exprimer sa somme en fonction de u_0.

4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

5. Étudier la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$.

6. On pose $a_n = (u_n)^{-1} - (u_{n+1})^{-1}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite, notée L pour le reste de cet énoncé.

7. On admet que $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ tend vers L quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n.

8. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 44. **Exercice mineur.**

On considère l'ensemble E des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) traduisant l'appartenance à E.

2. En déduire que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 45. $\boxed{\textbf{Exercice majeur.}}$

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Pour tout x réel, montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

2. Trouver une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}}{1+x^2}.$$

3. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puis montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée. En déduire une expression de f.

4. Pour tout $x \geqslant 0$, prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{e}^{-xu} \, \mathrm{d}u$. Sa valeur est notée $\mathrm{L}(x)$.

5. On admet que la fonction L est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \, \mathrm{d}u$.

Exercice 46. $\boxed{\textbf{Exercice mineur.}}$

On considère le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x - y + z + t = 0$ et $x - y - 2z - t = 0$.

Trouver une base orthonormale du plan $\mathcal{P}$ et déterminer la distance du vecteur $u = (1, 0, -1, 0)$ à ce plan.

Exercice 47. $\boxed{\textbf{Exercice majeur.}}$

On note E l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum (x_n)^2$ converge. On note f l'application définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe son premier terme x_0.

1. En développant $(|a| - |b|)^2$, montrer l'inégalité $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

4. Étant donné deux éléments $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Montrer que la fonction φ est bien définie sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ et que c'est un produit scalaire sur E.

On note $|| \; ||$ la norme associée à ce produit scalaire.

5. Pour tout élément x de E, montrer que la suite $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi un élément de E.
Cette suite est notée $g(x)$ et on a ainsi défini une application g de E vers E.

6. Montrer que l'application g est lipschitzienne pour la norme $|| \; ||$.

Exercice 48. $\boxed{\textbf{Exercice mineur.}}$

On note classiquement $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $\mathrm{S}_k = 1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On note Y le reste de la division euclidienne de X par 3.

Que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0)$? Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Exercice 49. $\boxed{\textbf{Exercice majeur.}}$

On fixe un entier n dans $\mathbb{N}^*$ et un élément p de $]0,1[$.

1. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{\ell+n-1}{n-1} x^\ell.$$

2. On considère une variable aléatoire T qui suit la loi géométrique de paramètre p. Rappeler en formules ce que cela signifie et donner une situation concrète que l'on modélise par cette loi.

3. On note $\mathrm{G_T}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire T. Pour tout t dans $[-1,1]$, prouver la relation

$$\mathrm{G_T}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

4. On se donne une suite finie $(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi que T. On pose

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_1 + \cdots + \mathrm{T}_n.$$

Exprimer la fonction génératrice de S_n sur le segment $[-1,1]$.

5. En déduire la loi de la variable aléatoire S_n.

Exercice 50. $\boxed{\textbf{Exercice mineur.}}$

Soit un entier n supérieur ou égal à 3. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première ligne et de la première colonne, qui valent 1.

Prouver que A est diagonalisable. Vérifier que 0 est une valeur propre de A.
Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$. En déduire les autres valeurs propres de A.

Exercice 51. $\boxed{\textbf{Exercice mineur.}}$

On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/7}$ puis

$$\mathrm{S} = \omega + \omega^2 + \omega^4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

a. Calculer $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ et ST.

b. En déduire les valeurs de S et de T.

Exercice 52. $\boxed{\textbf{Exercice mineur.}}$

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Prouver l'équivalence

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 53. $\boxed{\textbf{Exercice majeur.}}$

Pour tout x réel qui le permet, on pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $]-1,1[$.

2. Justifier rapidement que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée.

Le but des questions qui suivent est de trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

3. On fixe x dans $]0,1[$ et on définit la fonction $g_x : t \mapsto x^{t^2}$.

a. Montrer que la fonction g_x est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'inégalité $g_x(n) \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'inégalité $g_x(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} g_x(t)\ \mathrm{d}t$.

d. Prouver l'encadrement $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)\ \mathrm{d}t + 1$.

e. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)\ \mathrm{d}t$ se met sous la forme $\dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{-\ln(x)}}$ pour une certaine constante C indépendante de x.

4. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\mathrm{C}}{\sqrt{1-x}}$ quand x tend vers 1.

Exercice 54. $\boxed{\textbf{Exercice majeur.}}$

1. Rappeler la formule de Stirling.

2. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^k(t)\ \mathrm{d}t$. Pour tout x dans $]-1,1[$, on pose
$$f(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}.$$

a. Justifier l'existence de cette intégrale.

b. Obtenir la relation de récurrence $\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2}\mathrm{I}_k$.

c. En déduire une expression de I_{2k}.

3. Exprimer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto 1/\sqrt{1+u}$.

4. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver la relation $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\right)^2 x^{2k}$.

5. Calculer la limite de f en 1.

Exercice majeur

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout élément f de E, on définit la fonction $\phi(f)$ par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

On note f_0 la fonction constante égale à 1 puis, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

1. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?

2. Pour toute f de E, montrer que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée. L'application ϕ est-elle injective ?

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$. On donnera des relations de récurrence et on exprimera β_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par une constante strictement positive puis obtenir la minoration

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{4 - 2^{-n}}.$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et exprimer sa limite.

5. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction f et déterminer cette fonction. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice mineur

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation

$$(z^2 + 1)^n - (z - \mathrm{i})^{2n} = 0$$

d'inconnue z complexe.

Exercice majeur

1. Pour tout x réel, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{1}{x + \mathrm{i}}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2(x + \mathrm{i})} y = 0$.

3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée.

4. Prouver que f est solution de l'équation différentielle de la deuxième question.

5. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.
Montrer que cette intégrale est bien définie et faire le lien avec $f(x)$. En déduire le signe de $g(x)$.

Exercice mineur

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$?

2. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice majeur

On pose $h(t) = \ln(t)/t$ pour tout t dans $]0, +\infty[$.
De plus, pour tout entier n strictement positif, on pose

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \qquad \text{et} \qquad a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}.$$

a. Étudier les variations de la fonction h.

b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, montrer l'encadrement

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n}.$$

c. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(n)/n$ converge.

d. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$a_{n+1} - a_n = h(n+1) - \int_n^{n+1} h(t)\ \mathrm{d}t.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis justifier que cette suite converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

On rappelle que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.

e. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$\mathrm{S}_{2n} + t_{2n} = \ln(2) \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + t_n.$$

f. Exprimer S_{2n} en fonction de a_n, de a_{2n} et de u_n. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice mineur. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

On pose $\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$ et on définit $\mathcal{C}(\mathrm{D})$ similairement.

a. Justifier que A et D sont semblables.

b. En déduire un isomorphisme entre $\mathcal{C}(\mathrm{A})$ et $\mathcal{C}(\mathrm{D})$.

c. Déterminer $\mathcal{C}(\mathrm{D})$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}(\mathrm{A})$.

Exercice majeur. On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on note Δ l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $f_{\mathrm{A}} : \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{AMA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient en position (i, j), qui est égal à 1.

1. Montrer que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'endomorphisme f_{A} est bijectif si et seulement si la matrice A est inversible.

3. Étant donné une matrice A et deux indices i et j de $[\![1, n]\!]$, calculer les matrices $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{A}$ et $\mathrm{AE}_{i,j}$.

4. Prouver l'égalité $\Delta = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

5. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $f_{\mathrm{A}} = \mathrm{Id}$.

Exercice mineur. On pose $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{nt})$ pour tout t réel convenable.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Pour tout $x > -1$, prouver l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$.

3. Montrer que $f(t)$ tend vers $\ln(2)$ quand t tend vers $+\infty$.

Exercice majeur. On note V l'ensemble des suites complexes $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = v_{n+2} + v_n.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que P possède une unique racine réelle, notée b.

3. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - b)(\mathrm{X} - z)(\mathrm{X} - \bar{z})$.

4. On définit de V dans $\mathbb{C}^3$ l'application $\Phi : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (v_0, v_1, v_2)$.

Montrer que Φ est un isomorphisme. En déduire que V est de dimension finie et préciser sa dimension.

5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de V. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$.

Donner une matrice A vérifiant l'identité $\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{W}_n$.

6. La matrice A est-elle diagonalisable ? En déduire la forme générale des éléments de V.

Exercice mineur. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - 1)^{2n+1} - 1$.

1. Déterminer les racines du polynôme P.

2. En déduire une simplification du produit $\prod\limits_{k=0}^{2n} \cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice majeur. Pour tout couple (x, y) d'éléments de $]0, +\infty[$, on pose $f(x, y) = (x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

1. Déterminer les points critiques de f et évaluer f en ces points.

2. Soit $(x, y) \in (]0, +\infty[)^2$. Pour tout t réel, on pose

$$\mathrm{P}(t) = \left(t\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(t\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2.$$

Montrer que P est un polynôme de degré 2 et calculer son discriminant.
En déduire l'inégalité $f(x, y) \geqslant 4$.

3. On considère maintenant un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (]0, +\infty[)^2$, on pose

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

En s'inspirant de la méthode ci-dessus, prouver la minoration $g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant n^2$. Étudier le cas d'égalité.

4. Prouver l'identité $g(x_1, \ldots, x_n) = n + \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$.

En déduire une nouvelle démonstration de la minoration $g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant n^2$.

Exercice mineur. Soit E un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad (f(x)|x) = 0.$$

1. Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, prouver la relation $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

2. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

Exercice majeur. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $x > 0$, montrer que $\mathrm{F}(x)$ existe.

2. Montrer que la fonction F est positive et décroissante. Trouver sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

4. Simplifier l'expression de $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x)$.

5. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

6. Trouver un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice mineur. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $u(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}' + \mathrm{P}$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Déterminer les valeurs propres de U.

CC-INP

Exercice 55. **Exercice majeur**

Soit $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$.

2. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa dérivée.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

On admet provisoirement la propriété suivante

$$\forall a > 0, \quad \exists \mathrm{K} \geqslant, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$

4. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

5. Simplifier $\mathrm{F}' - \mathrm{F}$ et en déduire une expression de F.

6. Prouver la propriété admise

Exercice 56. **Exercice mineur**

Soit un entier $n \geqslant 2$.

a. Résoudre l'équation $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

b. Résoudre l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$

Mines-Télécom

Exercice 57. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k}$.

1. Ensemble de définition de f ?

2. Étudier la continuité de f.

3. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

4. Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

5. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Exercice 58. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A, son image et son noyau.

2. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 59. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = x + y$.

On utilisera le changement de variables $(x, y) = (u, v + u^2/2)$.

Exercice 60. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$.

On pose $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 61. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \ln(t)\, \mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 62. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

X-ESPCI

Exercice 63. On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir la séquence `pile-face`. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués.

Calculer l'espérance de X.

Exercice 64. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension 2 stable par A.

Exercice 65. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe une famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $(n+1)$ vecteurs propres de u dont toute sous-famille de n vecteurs soit libre.

Montrer que u est une homothétie.

Exercice 66. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ a une diagonale nulle.

Exercice 67. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice P de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} ait ses coefficients diagonaux égaux ?

Exercice 68. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On fait les hypothèses

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

Pour tout x dans $[0, +\infty[$, prouver la majoration

$$\int_0^x f(t)^3 \,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 69. a. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

b. Même question avec l'identité $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice 70. On note E l'ensemble des fonctions $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitziennes et qui s'annulent en 0.

Déterminer $\sup \left\{ \int_0^1 (u(t) - u(t)^2) \,\mathrm{d}t \ ; \ u \in \mathrm{E} \right\}$.

Exercice 71. Soit β une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur β pour que le système différentiel

$$x'' = -\beta(t)y', \qquad y'' = \beta(t)x'$$

admette une solution périodique non constante.

Exercice 72. Soit $\mathrm{R} > 0$. On considère deux fonctions a et b développables en série entière sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et on se donne l'équation différentielle

$$xf''(x) + xb(x)f'(x) + a(x)f(x) = 0.$$

Montrer que cette équation différentielle a une solution non triviale développable en série entière autour de 0.