Lundi 30 mai 2022 — espaces euclidiens

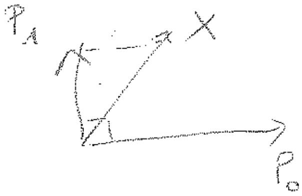
Ex 44.

a. Forme bilinéaire sym : je ne détaille pas.

$(P|P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$.

Hyp : $(P|P) = 0$. Alors $\begin{cases} (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0) \\ \deg(P) \leq 2 \end{cases}$ donc $P = 0$.

b. On prend $P_0 = 1$ puis $P_1 = X - \dfrac{(P_0|X)}{(P_0|P_0)} P_0$.



$(P_0|P_0) = 3$, $(P_0|X) = 3$ donc $P_1 = X - 1$.

$\|P_1\|^2 = \|X\|^2 - \|P_0\|^2 = 2$.

Une b.o.n de $\mathbb{R}_1[X]$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ex 46. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n de E. On pose $P = M_{\mathcal{E}}(v_1, \dots, v_n)$.

$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$. Soit $x \in E$, décomposé sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cancel{v_i} e_i$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad (x|v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i,j}$$

On obtient : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_{i,j} \right)^2$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i x_k p_{i,j} p_{k,j}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On dérive deux fois selon } x_i : \quad 2 = 2 \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 \\ \text{On dérive selon } x_i \text{ puis } x_k \ (i \neq k) : \quad 0 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} p_{k,j} \end{array}\right\} P \times P^T = I_n$$

$P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{V}$ est une b.o.n. de E.

~~Ex 48. Soit $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ une b.o.n de E.~~

~~On pose $A = M_{\mathcal{E}}(u)$. $A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$ ($u(e_1) \dots u(e_n)$)~~

~~But : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i^T A_j = 0$, i.e. $E_i^T \underbrace{(A^T A)}_{\text{notée } S} E_j = 0$~~

~~$S \in S_n(\mathbb{R})$. Il suffit de faire en sorte que $(E_1, \dots, E_n)$ soit une base de diag de S, c'est-à-dire que soit diag.~~

Ex 48. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une b.o.n quelconque de E.

On pose $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

But : trouver une b.o.n $(P_1, \dots, P_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $(AP_1, \dots, AP_n)$ soit orth, c'est-à-dire $(AP_i | AP_j) = 0$ si $i \neq j$.

Or $(AP_i | AP_j) = P_i^T (A^T A) P_j$. $A^T A \in S_n(\mathbb{R})$.

le th spectral donne l'ex d'une b.o.n de diag de $A^T A$.

Il suffit de choisir les P_i ainsi.

Ex 53. a. p et q sont sym donc $p+q$ aussi donc son polycar est scindé sur $\mathbb{R}$ (th spectral).

b. Soit $\lambda \in Sp(u)$. Soit x un vect pr associé : $\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq 0_E \end{cases}$.

$$\lambda = \frac{(u(x)|x)}{(x|x)} = \frac{(p(x)|x)}{(x|x)} + \frac{(q(x)|x)}{(x|x)}.$$

$E = \mathrm{Ker}(p) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(p - Id_E)$

$x = \underbrace{x - p(x)}_{\text{noté } x_0} + \underbrace{p(x)}_{\text{noté } x_1}$

$(p(x)|x) = (x_1 | x_0 + x_1) = \|x_1\|^2$

$(x|x) = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2$

$\Bigg\} \; 0 \leq \dfrac{(p(x)|x)}{(x|x)} \leq 1$

idem avec q donc $0 \leq \lambda \leq 2$.

c. Hyp. $\begin{cases} u(x) = 0_E \\ x \neq 0_E \end{cases}$. Alors (mêmes notations) $\dfrac{(p(x)|x)}{(x|x)} = 0$ donc $\|x_1\|^2 = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p)$

de même $x \in \mathrm{Ker}(q)$.

$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Inclusion réc immédiate.

De même, $\mathrm{Ker}(u - 2Id_E) = \mathrm{Ker}(p - Id_E) \cap \mathrm{Ker}(q - Id_E)$.

Ex 50.

1. $P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\lambda_i = P_i^T A P_i > 0$.

$P \in O_n(\mathbb{R})$

On choisit $B = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^T$ et ça convient.

2.a. A, I, A^{-1} sont sym donc N aussi.

$P^T N P = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i = -\lambda_i + (\lambda+\mu) - \lambda\mu/\lambda_i$.

$\alpha_i = -\frac{1}{\lambda_i}\left(\lambda_i^2 - (\lambda+\mu)\lambda_i + \lambda\mu\right) = \underbrace{-\frac{1}{\lambda_i}}_{<0} \underbrace{(\lambda_i - \lambda)}_{\leq 0}\underbrace{(\lambda_i - \mu)}_{\geq 0} \geq 0$.

2.b. $f(0) = \lambda\mu (A^{-1}X | X) \geq 0$ $\quad (>0 \text{ si } X \neq 0)$.

$f(1) = (X \mid AX - (\lambda+\mu)X + \lambda\mu A^{-1}X) = -(X|NX) \leq 0$
$(<0 \text{ si } X \neq 0)$.

2.c. Si $X = 0$, l'encadrement est connu.

Si $X \neq 0$, f est un polynôme de degré 2 qui change de signe donc son discr est >0. $(\lambda+\mu)^2 (X|X)^2 - 4(\lambda\mu)(X|A^{-1}X)(X|AX) > 0$.

Dans tous les cas, $(X|A^{-1}X)(X|AX) \leq \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu} (X|X)^2$.

Pour l'autre sens, on déc $X = \sum_{i=1}^n y_i P_i$.

$(X|AX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$, $\quad (X|A^{-1}X) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} y_j^2$.

$\cancel{(X|AX)(X|A^{-1}X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_j} y_i^2 y_j^2}$

Notons $u = (\sqrt{\lambda_1}\, y_1, \dots, \sqrt{\lambda_n}\, y_n)$ et $v = \left(\frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$.

$(X|AX)(X|A^{-1}X) = \|u\|^2 \|v\|^2 \geq (u|v)^2 = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^2 = \|X\|^4$.