Mathématiques 2

Oral

PC

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

1. À l'aide de l'ordinateur, tracer les courbes des fonctions P_n pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $1 \leqslant n \leqslant 10$.
   On utilisera la commande `plt.axis([-2, 2, 0, 5])` afin de cadrer la fenêtre graphique.
   Que remarquez-vous sur les lieux où P_n atteint un minimum ?

2. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$P_n'(x) = \frac{u_n(x)}{(x-1)^2}$$

   où u_n est une fonction polynomiale à déterminer.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'allure du tableau de variations de la fonction P_n. Montrer en particulier que P_n possède un minimum unique sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera a_n le réel où P_n atteint son minimum.

4. Créer une fonction informatique `A` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une valeur approchée de a_n.

5. Représenter graphiquement a_n en fonction de n pour $1 \leqslant n \leqslant 500$. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?

6. Déterminer un équivalent simple de la quantité $\ln(2n+1-2na_n)$ puis, en exploitant la relation $P_n{}'(a_n) = 0$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. On pose maintenant $a_n = -1 + h_n$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8. On pose $w_n = h_n - \dfrac{\ln n}{2n} - \dfrac{\ln 2}{n}$. À l'aide d'une représentation graphique, conjecturer la nature de la série $\sum w_n$.

9. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.