CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 2

PC

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \text{ et } V_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ avec } m = \mathbb{E}(U_1) \text{ et } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(U_1)}$$

Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$ fini. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$$

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.polynomial import Polynomial
```

1. Préciser $\mathbb{E}(U_1)$, $\mathbb{V}(U_1)$ et une expression de la fonction génératrice G_{U_1}.

2. Exprimer la fonction génératrice G_{S_n} en fonction de G_{U_1}.

3. L'exemple suivant construit le polynôme $\left(\sum_{k=1}^{4} X^k\right)^3$

```
P = [0] + [1]*4
P = Polynomial(P)**3    # P=(X+...+X^4)^3}
```

   Tester ces instructions.

   Dans ce qui suit, on fixe $N = 10$.

4. Pour t réel, donner une expression sommatoire (qu'on ne cherchera pas à simplifier) de $M_{V_n}(t)$ en fonction de la loi de S_n.

5. Pour $t \in \{1/3, 1/2, 7/8\}$, représenter les termes de la suite $\left(M_{V_{10n}}(t)\right)_{n\in[1,10]}$.

   Que peut-on conjecturer ?

6. Démontrer la conjecture faite à la question précédente.

7. Illustrer ce résultat en représentant le graphe de $t \mapsto M_{V_{100}}(t)$ pour $t \in [0, 1]$ simultanément avec un autre graphe à préciser.