Mathématiques 2

Oral

PSI

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Pour traiter ce sujet le candidat est vivement invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice carrée $M(n)$ formée « en serpent » par les nombres 1, 2, 3, 4, ⋯, n^2. Par exemple,

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

1. Donner en Python ou en Scilab une fonction f telle que $f(n,i,j) = \left(M(n)\right)_{i,j}$.
2. Créer une fonction M d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant $M(n)$. Tester pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.
3. Calculer le rang de $M(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Conjecturer la valeur de $\mathrm{rg}(M(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture.
5. Définir une fonction permettant d'afficher la ligne brisée formée par les points de coordonnées $(k, \mathrm{tr}(M(k)))$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

   Tester pour $n = 100$. Essayer aussi pour $n = 1000$.
6. Afficher les 100 premières valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}(M(n))}{n^3}$. Commenter.
7. Trouver un équivalent de $\mathrm{tr}(M(n))$ quand n tend vers $+\infty$.
8. Trouver une expression pour $\mathrm{tr}(M(n))$ (on pourra commencer par traiter le cas où n est pair).