Samedi 4 juin 2022 — intégration

Ex 112. $\varphi : x \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,dt - f(x)\int_a^b g(t)\,dt$ est cont.

~~$\varphi(a) = \int_a^b [f(t) - f(a)]$~~

Il existe c et d dans $[a,b]$ tq $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.

$$\varphi(c) = \int_a^b \underbrace{[f(t) - f(c)]}_{\geq 0} \underbrace{g(t)}_{\geq 0}\,dt \geq 0 \quad + \text{Th val int.}$$

$$\varphi(d) = \int_a^b \underbrace{[f(t) - f(d)]}_{\leq 0} \underbrace{g(t)}_{\geq 0}\,dt \leq 0$$

Ex 118. a. $0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ donc $I_n \longrightarrow 0$.

b. $\int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_{\text{prim}} \underbrace{e^{-2x}}_{\text{dér}}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)\left(-2e^{-2x}\right)dx$

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+1} \quad \text{donc} \quad 2I_{n+1} + (n+1)I_n = 1.$$

Ainsi, $\boxed{n I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$. $\quad I_n = \frac{1}{n}[1 + \varepsilon_n] \quad \varepsilon_n \longrightarrow 0$.

c. ~~$I_n = \frac{1}{2}[1 - nI_n]$~~

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}\left[\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \Bigg| \quad -\frac{2}{(n+1)^2} = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{3}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{6}{(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \Bigg| \quad \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{11}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

etc

Ex 119. $f(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto f(x,t)$ est cont sur $]0,+\infty[$. (et positive)

$f(x,t) \underset{t\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(1)$ $\quad f(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ int sur $]0,1]$.

$\forall t \geq 1$, $|f(x,t)| \leq \frac{2}{t^2} e^{-t} \leq 2e^{-t}$ int sur $[1,+\infty[$.

$\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$.

b. $\boxed{1}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est cont sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,

avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ / $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt) e^{-t}$.

$\boxed{3}$ Bidule.

$\boxed{4}$ Soit $a > 0$. $\forall (x,t) \in [-a,a] \times]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq a e^{-t}$

$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-t}$.

th dér sous l'int.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} \, dt$.

$F''(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} \, dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$.

$F'(0) = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

$F(0) = 0$.

$$\boxed{F(x) = x \,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}.$$