Mardi 7 juin 2022 équadiffs

Ex 132. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. le syst s'écrit $X' = AX$.

$\chi_A(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$. $A - I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. $(A - I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow T$.

$Y = P^{-1}X$. $X' = AX \iff Y' = TY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$

$\iff \exists c_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + c_2 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \end{cases}$ $\longleftarrow z_1(t) = e^{-t} y_1(t)$

$z_1'(t) = e^{-t}[y_1'(t) - y_1(t)]$

$\iff \exists c_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1'(t) = c_2 \\ y_2(t) = c_2 e^t \end{cases}$

$\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = (c_2 t + c_1) e^t \\ y_2(t) = c_2 e^t \end{cases}$

$\iff$ ———, $\begin{cases} x(t) = (2c_2 t + 2c_1 + c_2) e^t \\ y(t) = (2c_2 t + 2c_1) e^t \end{cases}$

$X = y_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ex 133. Soit y une sol.

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{y''(t)y'(t)}{q(t)} + y(t)y'(t) = 0$$

$\forall t \geq 0, \quad q(t) \geq q(0) > 0$ ~~[illegible]~~

donc $\frac{1}{q(t)} \leq \frac{1}{q(0)}$ bof.

$\cancel{\frac{y''(t)y'(t)}{q(t)}}$

Posons $g(t) = y(t)^2 + \frac{1}{q(t)} y'(t)^2$.

$$\forall t \geq 0, \quad g'(t) = \underbrace{2y'(t)y(t) + \frac{1}{q(t)} 2y'(t)y''(t)}_{=0} - \frac{q'(t)}{q(t)^2} y'(t)^2$$

$g'(t) \leq 0$. g est décr donc $y(t)^2 \leq g(t) \leq g(0)$

y est bornée.

Ex 135. Trouver une sol sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto 1$, voyons.

Résolution sur $]0,+\infty[$. Ça se réécrit $y' + \frac{1}{x^2} y(x) = \frac{1}{x^2}$,

ou encore $e^{-1/x} y'(x) + \frac{1}{x^2} e^{-1/x} y(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$.

Ça équivaut à : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \quad e^{-1/x} y(x) = e^{-1/x} + \lambda$

c'est-à-dire $y(x) = 1 + \lambda e^{1/x}$.

Idem sur $]-\infty, 0[$.

Ex 136. ~~$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = e^t y$~~ $\forall x > 0, \ y(x) = z(\ln(x))$

$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln(x))$

$\forall x > 0, \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} z''(\ln(x))$

$x^2 y''(x) + y(x) = \underbrace{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x))}_{=0}$

y est sol $\iff \forall x > 0$, [illegible]

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - z'(t) + z(t) = 0 \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ z(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, ~~$\forall t \in \mathbb{R}$~~ $\forall x > 0, \quad y(x) = \sqrt{x}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$.

Ex 134.

1, $\cos^n(t) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{si } t \in]0, \pi/2[\end{cases}$.

2. $|\cos^n(t)| \leq 1$ + conv dom $u_n \longrightarrow 0$.

3. $\left| \dfrac{u_{2n+3}\, x^{2n+3}}{u_{2n+1}\, x^{2n+1}} \right| = \dfrac{2n+2}{2n+3} x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$

$R = 1$.

conv abs si $|x|<1$
divgr si $|x|>1$

4. Je fais confiance à l'énoncé.

5. $u_0 = \pi/2$, $u_1 = 1$. f est paire, g est impaire

donc (f, g) est libre. L'esp des sol est de dim 2

donc c'est Vect (f, g)

6. $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \underbrace{x^{2n+1} \cos^n(t)}_{\text{noté } a_n(t)} dt$

$\|a_n\|_{\infty, [0, \pi/2]} = |x|^{2n+1}$ conv norm donc int terme à terme.

$g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} \cos^{2n+1}(t) \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{x \cos(t)}{1 - x^2 \cos^2(t)} dt$

7. $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{x}\, x\cos(t)\,dt}{1 - x^2 + x^2 \sin^2(t)}$ $\quad u = x \sin(t)$, $du = x\cos(t)\,dt$

$g(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{du}{1 - x^2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x} \frac{du/\sqrt{1-x^2}}{1 + \frac{u^2}{1-x^2}}$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$.

Ex 121.

1. $|x-e^{i\theta}|^2 = (x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta}) = x^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})x+1$
$= x^2 - 2\cos(\theta)\,x + 1$.

2. $|x| \neq 1$ donc $|x-e^{i\theta}|>0$ pour tout θ. $\theta \mapsto \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)$ est déf et cont sur $[0,\pi]$. $I(x)$ existe.

3. $I\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(1-\frac{2}{x}\cos(\theta)+\frac{1}{x^2}\right)d\theta = \int_0^\pi \ln\left[\frac{1}{x^2}\left(x^2-2\cos(\theta)x+1\right)\right]d\theta$

$= -2\pi\ln(|x|) + I(x)$.

4. $t = \pi-\theta$ $\quad I(x) = \int_\pi^0 \ln(1+2x\cos(t)+x^2)(-dt) = I(-x)$.
$\cos(t) = -\cos(\theta)$

5. $1-2x^2\cos(2\theta)+x^4 = |x^2-e^{i2\theta}|^2 = |x-e^{i\theta}|^2\times|x+e^{i\theta}|^2 = (x^2-2x\cos(\theta)+1)\times(x^2+2x\cos(\theta)+1)$.

5.a. Déjà fait !

5.b. ~~$I(x^2) = \int_0^\pi \ln(1-$~~

$I(x)+I(-x) = \int_0^\pi \ln(1-2x^2\cos(2\theta)+x^4)\,d\theta$

$= 2I(x)$ $\quad \underset{t=2\theta}{=} \int_0^{2\pi} \ln(1-2x^2\cos(t)+x^4)\frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}\right) \longleftarrow_{u=t-\pi} = \int_0^\pi = I(x^2)$,

6. $I(x) = \frac{1}{2}I(x^2) = \frac{1}{4}I(x^4) = \dots = \frac{1}{2^n}I(x^{2^n})$.

Lemme : $I(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. / $(1-|x|)^2 \leqslant x^2-2x\cos(\theta)+1 \leqslant (1+|x|)^2$ + th gend.

$2\pi\ln(1-|x|) \leq I(x) \leqslant 2\pi\ln(1+|x|)$

Ainsi, $\frac{1}{2^n}I(x^{2^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $I(x)=0$ si $|x|<1$.

Si $|x|>1$, $I(x) = 2\pi\ln(|x|) + \underbrace{I(1/x)}_{=0} = 2\pi\ln(|x|)$.