Mercredi 8 juin 2022 — evn

Ex 59. a. encore !

b. $(P_1, \dots, P_n)$ base de diag. Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$. $X = \sum_{k=1}^{n} x_k P_k$.
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} M^l X = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\underbrace{\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_i^l}_{\text{noté } u_{k,i}} \Big) P_i$$

Si $\lambda_i = 1$, $u_{k,i} = 1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$.

Si $\lambda_i \neq 1$, $u_{k,i} = \frac{1}{k} \times \frac{1-\lambda_i^k}{1-\lambda_i}$ donc $|u_{k,i}| \leq \frac{2}{|1-\lambda_i|} \times \frac{1}{k}$

donc $u_{k,i} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

On note $J = \{ i \in [\![1,n]\!] ; \lambda_i = 1 \}$.

$$\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} M^l X \xrightarrow[k \to +\infty]{} \sum_{i \in J} x_i P_i \in E_1(M).$$

Ex 60. a. N est à val dans $[0, +\infty[$. Si $N(f) = 0$, alors $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f' \equiv 0 \end{cases}$ donc $f \equiv 0$.

Homog + inég tri : immédiat.

b. Soit $x \in [0,1]$. $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ donc $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt$
$\underbrace{\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'|}_{= N(f)}$

$\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq N(f)$ donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

c. Prenons $f_n : t \mapsto t^n$. $\|f_n\|_\infty = 1$, $N(f_n) = \cancel{\frac{1}{n+1}}\ n$.

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$ Un tel λ ne peut pas exister.

Ex 61.

a. Si $y=0$, $N(u)=|x|$.

Si $y\neq 0$,

t		$-\frac{x}{y}$	
$\lvert x+ty\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

le max de $|x+ty|$ quand t décrit $[0,1]$ est atteint en l'une des bornes donc il vaut $|x|$ ou $|x+y|$.

b. N est à val dans $[0,+\infty[$. Si $N(u)=0$ alors $\forall t\in[0,1]$, $x+ty=0$

donc $\begin{cases} x=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ donc $u=0$.

$N(\lambda u) = \max\{|\lambda x|, |\lambda x + t\lambda y|\} = \max\{|\lambda|\cdot|x|, |\lambda|\times \cancel{|x+ty|}\ |x+y|\}$

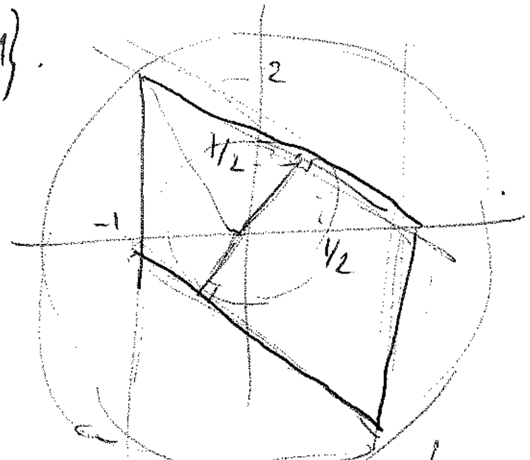
$= |\lambda|\, N(u)$

$s\mapsto |\lambda| s$ est croissante.

Soient u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^2$. ~~Soit~~ Il existe $t\in[0,1]$ tq $N(u_1+u_2)=|x_1+x_2+t(y_1+y_2)|$.
$\{0,1\}$
même

$N(u_1+u_2) \leq |x_1+ty_1| + |x_2+ty_2| \leq N(u_1)+N(u_2)$.

c. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\leq 1,\ |x+y|\leq 1\}$.



Graphiquement le plus petit disque contenant B est $D(0,\sqrt{5})$ et le plus grand contenu dans B est $D(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Soit $(x,y)\in B$. $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1+|x|\leq 2$

donc $x^2+y^2\leq 5$. $B\subset D(0,\sqrt{5})$. On ne peut pas faire moins du fait du point $(-1,2)$.

Soit $(x,y)\in D(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$. $x^2+y^2\leq\frac{1}{2}$ donc $|x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\leq 1$

et $|x+y| = |((x,y)|(1,1))| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\leq 1$.

donc $(x,y)\in B$. On ne peut pas faire plus du fait du point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Ex62. **a.** $B \subset Adh(B)$ donc $A \cap B \subset A \cap Adh(B) \subset \underbrace{Adh(A \cap Adh(B))}_{\text{fermé}}$

donc $Adh(A \cap B) \subset Adh(A \cap Adh(B))$.

Soit $x \in A \cap Adh(B)$. Il existe $r > 0$ tq $B(x,r) \subset A$

et il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élts de B tq $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $b_n \in B(x,r)$ donc $b_n \in A \cap B$

si bien que $x \in Adh(A \cap B)$.

$A \cap Adh(B) \subset \underbrace{Adh(A \cap B)}_{\text{fermé}}$ donc $Adh(A \cap Adh(B)) \subset Adh(A \cap B)$.

---

b. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $A \cap B = \emptyset$; $Adh(B) = \mathbb{R}$.

$Adh(A \cap B) = \emptyset$, $Adh(A \cap Adh(B)) = Adh(A) = \mathbb{R}$.

Ex63. Si $M \in Vect(I_n)$, $\mathcal{E} = \{M\} \leftarrow$ borné.

Hyp : $M \notin Vect(I_n)$.

1er cas : M n'est pas diag.

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & m_{i,j} & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$m_{i,j} \neq 0$.

$P_t = diag(1, \dots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{t}, 1 \dots 1)$, $t > 0$

$(P_t M P_t^{-1})_{i,j} = t\, m_{i,j}$

$L_i \leftarrow t L_i$ $\quad C_i \leftarrow C_i / t$

$\| P_t M P_t^{-1} \|_\infty \geq t |m_{i,j}|$ donc $\| P_t M P_t^{-1} \|_\infty \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

2e cas : M est diag avec des coefficients non tous égaux, mettons $m_{1,1} \neq m_{2,2}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$(P M P^{-1})_{1,2} = m_{1,1} - m_{2,2} \neq 0$ et on est ramené au cas précédent.

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ $\quad C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$\begin{matrix} m_{1,1} & \\ & m_{2,2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} m_{1,1} & -m_{2,2} \\ 0 & m_{2,2} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} m_{1,1} & m_{1,1} - m_{2,2} \\ 0 & m_{2,2} \end{matrix}$