Vendredi 10 juin 2022 — fonctions de plusieurs variables

Ex 137. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=(u,v) \iff \begin{cases} x + a\sin(y) = u \\ y + b\sin(x) = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u - a\sin(y) \\ y + b\sin(u - a\sin(y)) = v. \end{cases}$$

On pose $h_u : t \longmapsto t + b\sin(u - a\sin(t))$.

$t - |b| \leq h_u(t) \leq t + |b|$ donc $\begin{cases} h_u(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \\ h_u(t) \xrightarrow[t\to -\infty]{} -\infty \end{cases}$ + cont : ~~$h(t) = v$ a au moins une sol.~~ (val int)

h_u est surj.

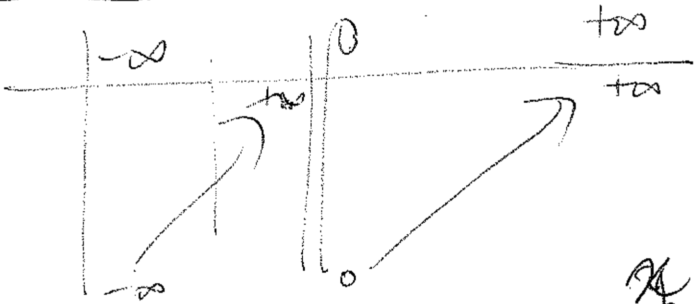
$\forall t \in \mathbb{R}$, $h_u'(t) = 1 - ab\cos(t)\cos(u - a\sin(t)) \geq 1 - |ab| > 0$

donc h_u est str cr donc ~~f~~ inj. h_u est une bij.

$$f(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} x = u - a\sin(h_u^{-1}(v)) \\ y = h_u^{-1}(v) \end{cases}$$

f est bij.

Ex 140. $\forall t \neq 0$, $g'(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\exp\left(t - \frac{1}{t}\right) > 0$.



unique sol. c'est -1.

$$\nabla f(x,y) = \left(e^y + y e^x,\ x e^y + e^x\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} e^{y-x} = -y \\ e^{x-y} = -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^{y-x} + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{y - \frac{1}{y}} + y = 0 \\ x = \frac{1}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ex 141.

a. Non : $f(x,x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

b. $Df(x,y) = \left(2x - \frac{32}{x^2y},\ 2y - \frac{32}{y^2x}\right)$.

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^3y = 16 \\ xy^3 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3y = 16 \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

$f(2,2) = 16$. Si f a un minimum global, c'est forcément en $(2,2)$.

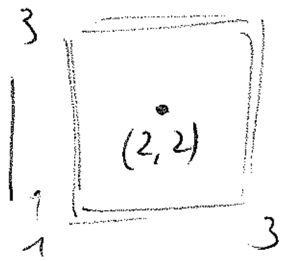
$$f(x,y) - 16 = x^2 + y^2 - 2xy + 2xy + \frac{32}{xy} - 16$$

$$= (x-y)^2 + \frac{2}{xy}\left[(xy)^2 - 8xy + 16\right] = (x-y)^2 + \frac{2}{xy}\left[xy - 4\right]^2 \geq 0.$$

16 est vraiment le minimum de f mais c'est vraiment une astuce à la noix.

c. f admet un min et un max sur $[1,3]$ (fonc cont sur fermé borné).

Le min est 2 (question b). Le max ne peut pas être atteint en un pt de l'intérieur donc c'est en un point du bord.



$\varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x,1) = x^2 + 1 + \frac{32}{x}$ || $\varphi'(x) = 2x - \frac{32}{x^2} = \frac{2}{x}(x^3 - 16)$

x	1	$16^{1/3}$	3
$\varphi(x)$	↘		↗

$\varphi(1) = 34$, $\varphi(3) = 10 + \frac{32}{3} < 34$.

$\max\limits_{[1,3]} \varphi = 34$.

$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x,3) = x^2 + 9 + \frac{32}{3x}$ || $\psi'(x) = 2x - \frac{32}{3x^2} = \frac{2}{3x^2}\left[3x^3 - 16\right]$

x	1	$(16/3)^{1/3}$	3
$\psi(x)$	↘		↗

$\psi(1) = 10 + \frac{32}{3} = \frac{62}{3} = 20 + \frac{2}{3}$ $\qquad \psi(3) = 18 + \frac{32}{9} = 28 + \frac{2}{9} > 20 + \frac{2}{3}$

$\max\limits_{[1,3]} \psi = 28 + \frac{2}{9} < 34$.

$$\max_{[1,3]^2} f = 34$$

Ex 142. $(u,v) = (x, y e^{x^2/2}) \iff (x, y) = (u, v e^{-v^2/2})$.

Le ch de var est bij.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On déf $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longmapsto f(u, v e^{-v^2/2}) \end{array}$

g est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x, y e^{x^2/2})$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2}) + e^{x^2/2} xy \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2})$.

$= 0$

f est sol sur $\mathbb{R}^2 \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$

$\iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$

$\iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = \varphi(v)$

$\iff$ ———, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(y e^{x^2/2})$.

Ex 143. Soit x tq $\|x\| = 1$. On définit $\varphi_x : t \longmapsto f(tx)$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_x'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$. $\forall t > 0$, $\varphi_x'(t) \geq \frac{1}{t}$

$\forall t \geq 1$, $\varphi_x(t) \geq \varphi_x(1) + \ln(t)$. Notons m le min de f sur la sphère unité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\| \geq 1$, $f(x) = \varphi_{x/\|x\|}(\|x\|) \geq m + \ln(\|x\|)$

donc $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.