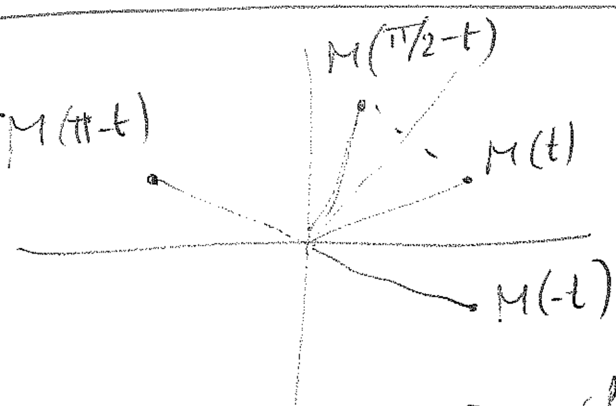
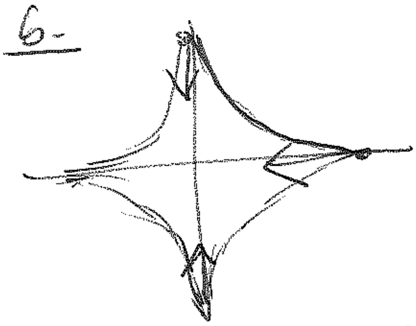
Samedi 11 juin 2022 - Géométrie

Ex 162.



b.



a.

On trace la traj de M sur $[0, \pi/4]$: réf droite $y = x$ pour avoir $[0, \pi/2]$ puis réfl (Oy) pour avoir $[0, \pi]$ puis réfl (Ox) pour avoir $[-\pi, \pi]$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)) = 3\cos(t)\sin(t)(-\cos(t), \sin(t))$.

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) \leq 0$, $y'(t) \geq 0$.

	0		$\pi/2$
$x(t)$	1	$\longrightarrow$	0
$y(t)$	0	$\longrightarrow$	1

La tangente fait un angle $\pi - t$ avec l'horizontale.

c. $T(t)$ est dirigée par $(-\cos(t), \sin(t))$:

éq $\begin{vmatrix} x - \cos^3(t) & -\cos(t) \\ y - \sin^3(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $x\sin(t) + y\cos(t) = \cos^3(t)\sin(t) + \cos(t)\sin^3(t)$

$\boxed{x\sin(t) + y\cos(t) = \cos(t)\sin(t)}$

d. $A(t) = (\cos(t), 0)$ $\quad B(t) = (0, \sin(t))$ $\quad \|\overrightarrow{A(t)B(t)}\| = 1$

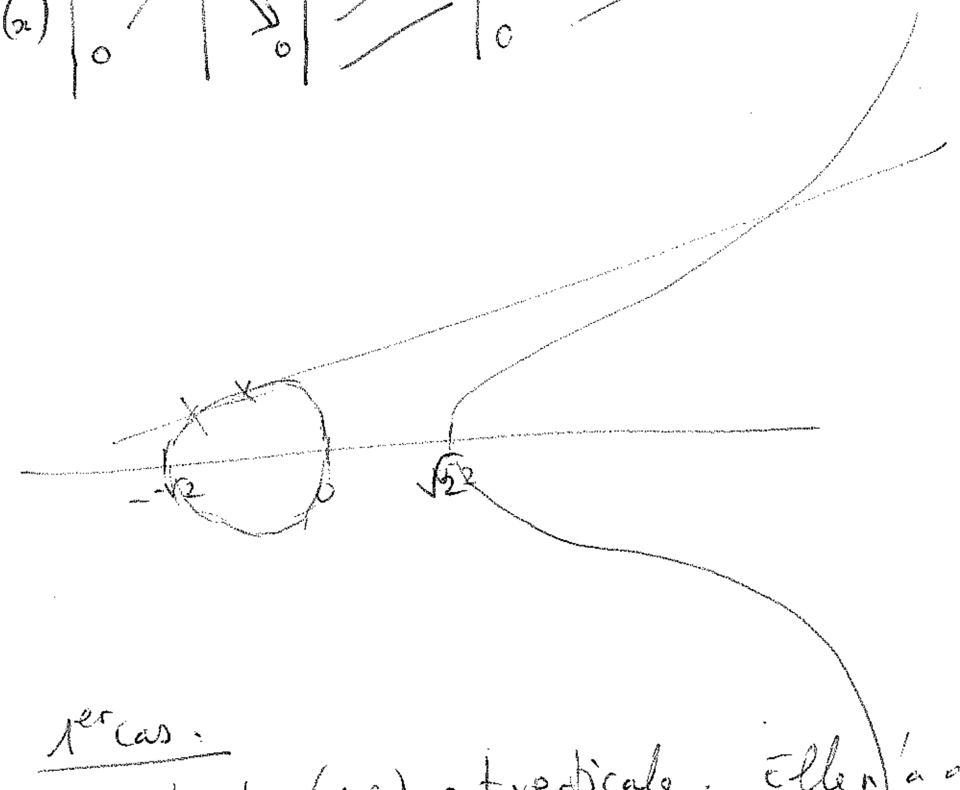
Ex 163. $\mathcal{D}$ est la réunion du graphe de $f : x \mapsto \sqrt{x^3-2x}$ et de celui de $-f$. ~~$\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup [$~~ $\quad x^3-2x = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$\mathcal{D}_f = [-\sqrt{2}, 0] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

$\forall x \in]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$.

x	$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	//////	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{3/2}$



<u>1er cas :</u>

<u>b.</u> La droite (AB) est verticale. Elle n'a alors pas d'autre pt d'intersection.

<u>2e cas :</u> ——— oblique. Éq $y = mx+p$.

$M \in (AB) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} y = mx+p \\ (mx+p)^2 = x^3-2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx+p \\ x^3 - m^2x^2 - 2(1+mp) - p^2 = 0 \end{cases}$.

Somme des racines $= m^2 \geq 0$ donc il y a une racine positive aussi.

Ex 164.

a: $D = \{ \underbrace{(-1+2t, t, 1)}_{M(t)} ; t \in \mathbb{R} \}$. $\Delta = \{ \underbrace{(3+\cancel{s}, 1+s, s)}_{N(s)} ; s \in \mathbb{R} \}$.

$\|\overrightarrow{M(t)N(s)}\|^2 = (4+s-2t)^2 + (1+s-t)^2 + (s-1)^2$. $\longleftarrow$ noté $f(s,t)$

Notons $\cancel{\ }\ \vec{w} = (+4, +1, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{u})$

$f(s,t) = \|\vec{w} + s\vec{v} - t\vec{u}\|^2$. Ceci est minimal $\Leftrightarrow$ $-s\vec{v} + t\vec{u} = p_F(\vec{w})$.

choisissons s, t ainsi. $\vec{w} + s\vec{v} - t\vec{u} \perp \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\begin{cases} \vec{w}\cdot\vec{u} + s\,\vec{v}\cdot\vec{u} - t\,\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \\ \vec{w}\cdot\vec{v} + s\,\vec{v}\cdot\vec{v} - t\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 3s - 5t = 0 \\ 4 + 3s - 3t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{cases} 9 + 3s - 5t = 0 \\ -5 \quad\quad + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 7/3 \\ t = 5/2 \end{cases}$$

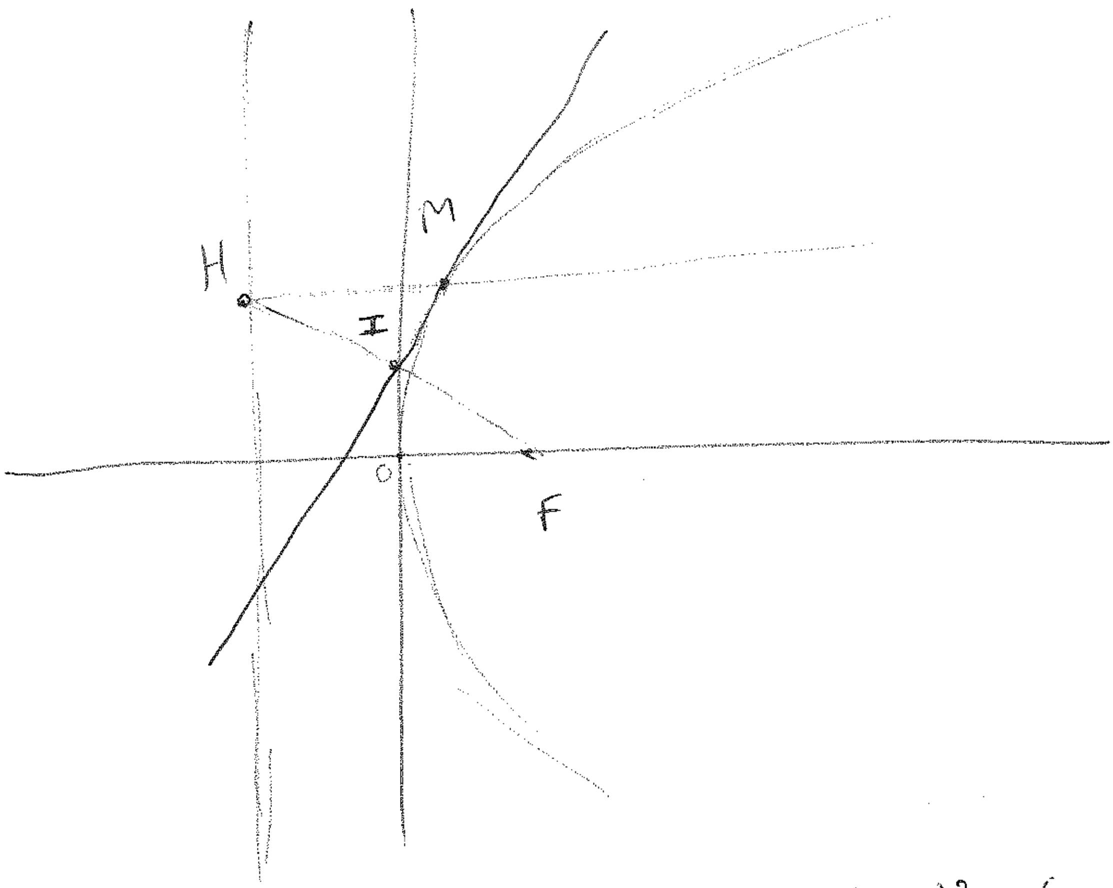
$\frac{5}{3}t - 3$

$\downarrow \frac{25}{6} - 3$

$$\min_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} f(s,t) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right) = \left(4 + \frac{7}{3} - 5\right)^2 + \left(1 + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2$$

$$= \left(4/3\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{9} + \frac{25}{36} + \frac{9}{4} = \frac{64+25+81}{36} = \frac{170}{36} = \frac{85}{18}.$$

Ex 165.



a. Soit $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\quad MF^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$, $\quad d(M,\mathcal{D})^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$.

$$MF = d(M,\mathcal{D}) \iff \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \iff y^2 = 2px$$

b. ~~Paramétrage~~ $F(x,y) = y^2 - 2px$. $\quad \vec{\nabla}F(x,y) = (-2p, 2y) \neq \vec{0}$.

La tangente est $\perp$ $\vec{\nabla}F(x,y)$ donc col à (y,p).

$H = (-p/2, y)$, $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $\qquad \overrightarrow{HF} = (p, -y) \perp (y,p)$.

La tangente passe par M et est $\perp$ à (HF) de même que la médiatrice de $[HF]$ donc ces deux droites sont identiques.