Lundi 13 juin 2022 -

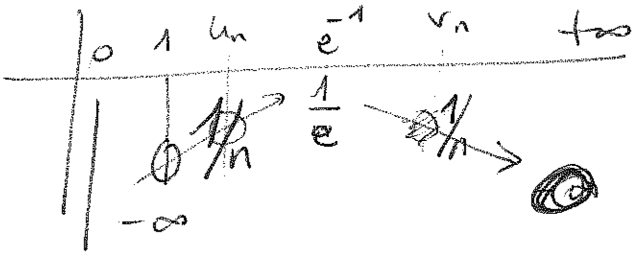
Ex 69. $\displaystyle \frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^{s-1}\,dt = \frac{1}{s}.$

Sommes de Riemann.

Ex 70. a. L'équation se réécrit $x = n\ln(x)$ ou encore $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$.

$\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)/x$

$\varphi'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.



φ est str cr sur $]0, e^{-1}]$ et sur $[e^{-1}, +\infty[$ / au plus une sol sur ces int.

th val int : au moins.

b. $u_n \in [1, e^{-1}]$. $\cancel{1 \leq (u_n)^n \leq e}$ $e \leq e^{u_n} \leq e^{e^{-1}}$ donc $e \leq (u_n)^n \leq e^{e^{-1}}$

$e^{1/n} \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}e^{-1}}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = \dfrac{1}{n}$ or $\ln(u_n) \sim u_n - 1$, $u_n \sim 1$

donc $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

c. $\tilde{\varphi} : [e^{-1}, +\infty[\longrightarrow]0, e^{-1}]$ est bij et $\tilde{\varphi}^{-1}(t) \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$
$x \longmapsto \varphi(x)$

or $v_n = \tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$v_n = n\ln(v_n)$ donc $\underbrace{\ln(v_n) - \ln(\ln(v_n))}_{\sim \ln(v_n)} = \ln(n)$

puis $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

d. $v_n = n\ln(n)(1+\varepsilon_n)$ (ε_n : lim nulle) | $v_n = n\ln(v_n) = n\left[\ln(n) + \ln(\ln(n)) + \ln(1+\varepsilon_n)\right]$
$= n\ln(n) + n\ln(\ln(n)) + o(n)$.

Ex 75. a. $f-g$ admet un min (fonc cont sur un seg). en un certain $t \in [0,1]$. si $f(t)-g(t)<0$, le Th des val int donne un pt d'annulation pour $f-g$, mais c'est faux.

Ainsi, $\underbrace{f(t)-g(t)}_{\text{noté } c} > 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq g(x) + c$.

b. Réc. H_n : $\forall x \in [0,1]$, $f^{on}(x) \geq g^{on}(x) + nc$.

H_0 s'écrit : $\forall x \in [0,1]$, $x \geq x + 0c$. C'est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n.

Soit $x \in [0,1]$. $f^{o(n+1)}(x) = f^{on}(f(x)) \geq g^{on}(f(x)) + nc$

or $g^{on}(f(x)) = f(g^{on}(x)) \geq g(g^{on}(x)) + c$ donc $f^{o(n+1)}(x) \geq g^{o(n+1)}(x) + (n+1)c$.

$H_n \Rightarrow H_{n+1}$.

c. $f^{on}(x) \geq \min_{[0,1]} f + nc$ donc $f^{on}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ impossible.

Ex 84. Hyp. $\sum a_n$ conv. donc $2n\, a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$0 \leq 2n a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$

$n a_{2n}$

$0 \leq (n+1) a_{2n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k$ donc $(n+1)a_{2n+1} \to 0$ donc $(2n+1)a_{2n+1} \to 0$.

donc $k a_k \to 0$.

donc $\sum (k a_k - (k+1) a_{k+1})$ conv.

~~$\sum n a_{2n}$~~ donc $k(a_k - a_{k+1}) = \underbrace{k a_k - (k+1) a_{k+1}}$ $+ a_{k+1}$) donc la série avec ce terme gén conv.

Hyp. $n a_n \to 0$ et $\sum n(a_n - a_{n+1})$ conv.

Idem : $a_n = \underbrace{n(a_n - a_{n+1})}_{\text{conv}} - \underbrace{[(n-1)a_n - n a_{n+1}]}_{\text{conv}}$

Ex 91 - a : $f_n(0)=0$ si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1} x^{\alpha-2}$

1er cas : $\alpha>1$: pas de conv simple.

2^e cas : $\alpha=1$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

3^e cas : $\alpha<1$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

discontinuité en 0.

b. Conv unif impossible si $\alpha=1$

$\alpha<1$. $f_n'(x) = n^\alpha \left[\frac{\alpha x^{\alpha-1}(1+nx^2) - x^\alpha 2nx}{(1+nx^2)^2}\right] = \frac{n^\alpha x^{\alpha-1}}{(1+nx^2)^2} \times \left(\alpha - n(2-\alpha)x^2\right)$.

$x_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

x	0	x_n	
$f_n(x)$	0 ↗		↘ 0

$\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)^\alpha \times \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\alpha-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ pas de conv unif sur $[0,+\infty[$.

Soit $a>0$. Il existe $n_a \in \mathbb{N}^*$ tq : $\forall n \geq n_a$, $0 \leq x_n \leq a$ conv unif sur $[a,+\infty[$.

donc $\forall n \geq n_a$, $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$