

Calcul matriciel

1 Calcul formel

1.1 Produit d'une ligne par une colonne

Soit n un entier strictement positif. On se donne une matrice ligne L et une matrice colonne C , toutes deux ayant n coefficients

$$L = (\ell_1 \quad \ell_2 \quad \cdots \quad \ell_n) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Le produit LC est alors défini par

$$L \times C = \ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n = \sum_{j=1}^n \ell_j c_j.$$

1.2 Produit d'une matrice par une colonne

1.2.1 Version « lignes-colonne »

Prenons une matrice M de n lignes, notées $L_1(M), \dots, L_n(M)$, chacune ayant p coefficients.
Prenons une matrice colonne C ayant p coefficients.

Le produit matriciel $M \times C$ est alors la matrice colonne dont les coefficients sont les produits des lignes de M par C .

$$M \times C = \begin{pmatrix} \frac{L_1(M)}{L_2(M)} \\ \vdots \\ L_n(M) \end{pmatrix} \times C = \begin{pmatrix} L_1(M) \times C \\ L_2(M) \times C \\ \vdots \\ L_n(M) \times C \end{pmatrix}.$$

La matrice colonne obtenue en résultat a le même nombre de lignes que la matrice M .

1.2.2 Version « colonnes-colonne »

Prenons une matrice M de p colonnes, notées $C_1(M), \dots, C_p(M)$, chacune ayant n coefficients.
Prenons une matrice colonne C ayant p coefficients, notés $c_1, \dots, c_p$.

Le produit matriciel $M \times C$ est alors la matrice colonne obtenue comme combinaison linéaire des colonnes de M , les coefficients de cette combinaison étant les coefficients de C .

$$M \times C = \left(C_1(M) \mid C_2(M) \mid \cdots \mid C_p(M) \right) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = c_1 C_1(M) + \cdots + c_p C_p(M).$$

1.2.3 Version « coefficients »

Notons $m_{i,j}$ les coefficients de la matrice M .

Soit i un indice de ligne (compris entre 1 et n donc). Le i -ième coefficient de la colonne $M \times C$ vaut alors

$$L_i(M) \times C = \sum_{j=1}^p m_{i,j} c_j.$$

1.2.4 Exercice

Montrer que toutes les formules présentées ci-dessus sont cohérentes entre elles.

1.3 Produit d'une ligne par une matrice

1.3.1 Version « ligne-colonnes »

Prenons une ligne L de n coefficients

$$L = (\ell_1 \quad \ell_2 \quad \cdots \quad \ell_n)$$

et une matrice M ayant p colonnes, notées $C_1(M), \dots, C_p(M)$, chaque colonne ayant n coefficients.

Le produit matriciel LM est alors la matrice ligne dont les coefficients sont les produits de la ligne L par les colonnes de M .

$$L \times M = L \times \left(C_1(M) \left| C_2(M) \right| \cdots \left| C_p(M) \right. \right) = (L \times C_1(M) \quad L \times C_2(M) \quad \cdots \quad L \times C_p(M)).$$

1.3.2 Version « ligne-lignes »

La matrice LM est aussi la matrice ligne obtenue comme combinaison linéaire des lignes de la matrice M , les coefficients de la combinaison linéaire étant les coefficients de la ligne L .

$$L \times M = (\ell_1 \quad \ell_2 \quad \cdots \quad \ell_n) \times \left(\begin{array}{c} L_1(M) \\ L_2(M) \\ \vdots \\ L_n(M) \end{array} \right) = \ell_1 L_1(M) + \ell_2 L_2(M) + \cdots + \ell_n L_n(M).$$

1.3.3 Version « coefficients »

Soit j un indice de colonne (compris entre 1 et n). Le j -ième coefficient de la matrice ligne LM est alors donné par

$$L \times C_j(M) = \sum_{i=1}^p \ell_i m_{i,j}.$$

1.3.4 Exercice

Montrer que ces formules sont cohérentes entre elles.

1.4 Produit de deux matrices

1.4.1 Notations

On prend une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.

Les coefficients de A sont notés $a_{i,j}$. Ceux de B sont notés $b_{j,k}$.

La matrice $A \times B$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont notés $c_{i,k}$.

1.4.2 Version « lignes-colonnes »

On peut visualiser le produit AB comme suit

$$A \times B = \left(\begin{array}{c} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_n(A) \end{array} \right) \times \left(C_1(B) \left| C_2(B) \right| \cdots \left| C_r(B) \right. \right) = \left(\begin{array}{cccc} L_1(A)C_1(B) & L_1(A)C_2(B) & \cdots & L_1(A)C_r(B) \\ L_2(A)C_1(B) & L_2(A)C_2(B) & \cdots & L_2(A)C_r(B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n(A)C_1(B) & L_n(A)C_2(B) & \cdots & L_n(A)C_r(B) \end{array} \right).$$

1.4.3 Version « coefficients »

Les coefficients de la matrice AB sont donnés par

$$c_{i,k} = L_i(A) \times C_k(B) = \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k}.$$

1.4.4 Version « matrice-colonnes »

Les colonnes de la matrice AB s'obtiennent comme produits de la matrice A par les colonnes de la matrice B . En particulier, la matrice AB a le même nombre de colonnes que B .

$$A \times B = A \times \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1(B) & C_2(B) & \cdots & C_r(B) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A \times C_1(B) & A \times C_2(B) & \cdots & A \times C_r(B) \end{array} \right).$$

Comme on l'a vu au paragraphe 1.2.2, chaque produit $A \times C_k(B)$ est une combinaison linéaire des colonnes de A . Plus précisément, on peut écrire

$$A \times C_k(B) = \sum_{j=1}^p b_{j,k} C_j(A).$$

1.4.5 Version « lignes-matrice »

Les lignes de la matrice AB s'obtiennent comme produits des lignes de A par la matrice B .

$$A \times B = \left(\begin{array}{c} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_n(A) \end{array} \right) \times B = \left(\begin{array}{c} L_1(A) \times B \\ L_2(A) \times B \\ \vdots \\ L_n(A) \times B \end{array} \right).$$

Comme on l'a vu au paragraphe 1.3.2, chaque produit $L_i(A) \times B$ est une combinaison linéaire des lignes de la matrice B . Plus précisément, on peut écrire

$$L_i(A) \times B = \sum_{j=1}^p a_{i,j} L_j(B).$$

1.4.6 Exercice

Montrer que tous ces points de vue concordent.

2 Lien avec les vecteurs

2.1 Codage d'un vecteur dans une base

Considérons un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F de dimension n , muni d'une base

$$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n).$$

Tout vecteur y de F possède dans cette base une unique décomposition de la forme

$$y = \sum_{i=1}^n y_i f_i,$$

où $y_1, \dots, y_n$ sont des scalaires.

La matrice colonne qui représente alors le vecteur y dans cette base est

$$M_{\mathcal{F}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\mathcal{F}} : & F & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & y & \mapsto M_{\mathcal{F}}(y) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme envoie la base $\mathcal{F}$ de F sur la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2.2 Codage d'une famille de vecteurs dans une base

Prenons à nouveau une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ d'un espace vectoriel F .

Considérons cette fois une famille $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de F .

La matrice représentative de la famille $\mathcal{V}$ relativement à la base $\mathcal{F}$ de F est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les p colonnes sont les colonnes représentatives des vecteurs $v_1, \dots, v_p$ relativement à la base $\mathcal{F}$.

$$M_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}) = M_{\mathcal{F}}(v_1, \dots, v_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} M_{\mathcal{F}}(v_1) & M_{\mathcal{F}}(v_2) & \cdots & M_{\mathcal{F}}(v_p) \end{array} \right).$$

En particulier, le coefficient de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est le coefficient devant e_i dans la décomposition du vecteur v_j relativement à la base $\mathcal{F}$.

2.3 Inverse d'une matrice

On travaille toujours avec un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension p et une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ de cet espace.

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Notons $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_p)$ la famille de p vecteurs de E définie par

$$M_{\mathcal{E}}(\mathcal{D}) = M.$$

Proposition. La famille $\mathcal{D}$ est une base de E si, et seulement si, la matrice M est inversible.

De plus, dans ce cas, la matrice M^{-1} est la matrice représentative de la famille $\mathcal{E}$ relativement à la base $\mathcal{D}$.

Démonstration du « seulement si ». On suppose que la famille $\mathcal{D}$ est une base de E . Notons N la matrice de la famille $\mathcal{E}$ relativement à la base $\mathcal{D}$, et notons $n_{i,j}$ ses coefficients.

Soit j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. La décomposition du vecteur e_j dans la base $\mathcal{D}$ s'écrit

$$e_j = \sum_{i=1}^n n_{i,j} d_i.$$

Représentons ces vecteurs dans la base $\mathcal{E}$.

$$E_j = \sum_{i=1}^n n_{i,j} C_i(M).$$

Utilisons la formule du paragraphe 1.2.2.

$$E_j = M \times \begin{pmatrix} n_{1,j} \\ \vdots \\ n_{p,j} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'égalité

$$I_p = M \times N,$$

qui montre que M est inversible et que son inverse est la matrice de la famille $\mathcal{E}$ relativement à la base $\mathcal{D}$. ♡

Je laisse la démonstration du « si » en exercice (elle se trouve de toute façon dans le cours de première année).

Application : inversion des matrices triangulaires. Illustrons sur un exemple comment ce point de vue permet d'inverser facilement des matrices triangulaires.

Prenons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interprétons cette matrice comme une matrice de changement de base $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$. On obtient les relations

$$\begin{cases} d_1 &= e_1 \\ d_2 &= -2e_1 + e_2 \\ d_3 &= 3e_1 + 5e_2 + e_3 \end{cases}.$$

On en tire alors directement les égalités

$$\begin{cases} e_1 &= d_1 \\ e_2 &= d_2 + 2e_1 = d_2 + 2d_1 \\ e_3 &= d_3 - 3e_1 - 5e_2 = d_3 - 5d_2 - 13d_1 \end{cases}$$

puis

$$M^{-1} = M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons cette même méthode à une matrice un peu plus sophistiquée — à peine, en fait. Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Interprétons cette matrice sous la forme $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{D})$. On obtient les relations

$$\begin{cases} d_1 = e_1 & + e_3 + e_4 \\ d_2 = e_1 & + e_3 \\ d_3 = & e_3 + e_4 \\ d_4 = e_1 + e_2 \end{cases}.$$

On en tire les égalités

$$\begin{cases} e_1 = d_1 - d_3 \\ e_2 = d_4 - e_1 = -d_1 + d_2 + d_4 \\ e_3 = d_2 - e_1 = -d_1 + d_2 + d_3 \\ e_4 = d_1 - d_2 \end{cases}$$

puis

$$M^{-1} = M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Première formule de changement de base

Proposition. On considère deux bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_p)$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Soit x un vecteur de E . Ses représentations matricielles relativement à ces deux bases sont liées par la formule

$$M_{\mathcal{D}}(x) = M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) \times M_{\mathcal{E}}(x).$$

Démonstration. Introduisons la décomposition du vecteur x dans la base $\mathcal{E}$ de E

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$$

et notons P la matrice de passage $M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E})$.

$$M_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) \times M_{\mathcal{E}}(x) = P \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p x_j C_j(P) = \sum_{j=1}^p x_j M_{\mathcal{D}}(e_j) = M_{\mathcal{D}} \left(\sum_{j=1}^p x_j e_j \right) = M_{\mathcal{D}}(x). \quad \heartsuit$$

3 Lien avec les formes linéaires

3.1 Codage d'une forme linéaire par une matrice ligne

Prenons une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

$$L = (\ell_1 \quad \dots \quad \ell_p).$$

L 'application

$$C \mapsto L \times C$$

est alors une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes à p coefficients.

Réciproquement, considérons une forme linéaire ℓ sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Rappelons la notation $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_p)$ pour la base canonique de cet espace vectoriel.

Prenons un vecteur colonne

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p c_i E_i.$$

Son image par la forme linéaire ℓ est alors

$$\ell(C) = \sum_{i=1}^p c_i \ell(E_i) = (\ell(E_1) \quad \cdots \quad \ell(E_p)) \times C.$$

On voit donc que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est de la forme $C \mapsto L \times C$ pour une certaine matrice ligne L , que j'ai décidé de noter $M_{\mathcal{E}}^*(\ell)$ dans le cadre de ce document — mais cette notation n'est pas officielle.

Résumé. Pour tout vecteur x de E , toute forme linéaire ℓ sur E et toute base $\mathcal{E}$ de E , le scalaire $\ell(x)$ est donné par la relation matricielle

$$\ell(x) = M_{\mathcal{E}}^*(\ell) \times M_{\mathcal{E}}(x).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \\ \ell & \mapsto & M_{\mathcal{E}}^*(\ell) \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace des formes linéaires sur E vers l'espace des matrices lignes à p coefficients.

Exemple. On prend $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$. On définit sur E la forme linéaire

$$\ell : P \mapsto \int_0^1 P(t) \, dt.$$

La matrice ligne associée à cette forme linéaire relativement à la base $\mathcal{E}$ est

$$M_{\mathcal{E}}^*(\ell) = (\ell(1) \quad \ell(X) \quad \ell(X^2) \quad \ell(X^3)) = \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}\right).$$

Soit P un élément de E . Ce polynôme s'écrit sous la forme

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3.$$

Sa représentation matricielle est donc

$$M_{\mathcal{E}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne

$$\ell(P) = \int_0^1 (a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) \, dt = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} = \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}\right) \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^*(\ell) \times M_{\mathcal{E}}(P).$$

3.2 Formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$

Toute forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ est de la forme

$$\ell : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$$

pour un certain p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de scalaires.

Notons $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. La matrice ligne canoniquement associée à la forme linéaire ci-dessus est

$$M_{\mathcal{B}}^*(\ell) = (\lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_p).$$

4 Lien avec les applications linéaires

4.1 Matrice d'une application linéaire, version « colonnes »

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, dont on note p et n les dimensions respectives.

On munit E d'une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$.

On munit F d'une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit a une application $\mathbb{K}$ -linéaire de E vers F .

La matrice de a relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est la matrice représentative de la famille $(a(e_1), \dots, a(e_p))$ relativement à la base $\mathcal{F}$ de F .

C'est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elle possède p colonnes car ses colonnes représentent les images par a des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ de E . Elle possède n lignes car ces vecteurs images sont exprimés relativement à la base $\mathcal{F}$.

Exemple. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 3y - z, x, 3y + z, x - 2y). \end{aligned}$$

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$.
Le calcul donne

$$\begin{cases} a(e_1) = (2, 1, 0, 1) = 2f_1 + f_2 + f_4 \\ a(e_2) = (3, 0, 3, -2) = 3f_1 + 3f_3 - 2f_4 \\ a(e_3) = (-1, 0, 1, 0) = -f_1 + f_3 \end{cases}$$

puis

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Image d'un vecteur par une application linéaire

On garde les notations de la question précédente.

Pour tout vecteur x de E , la formule suivante est alors valable

$$M_{\mathcal{F}}(a(x)) = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times M_{\mathcal{E}}(x).$$

En mots : la matrice colonne qui représente $a(x)$ s'obtient comme produit de la matrice de a par la matrice colonne de x , à condition d'avoir pris les bonnes bases.

Démonstration. Notons A la matrice de a relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Notons X la matrice colonne de x relativement à la base $\mathcal{E}$ de E .

Développons le produit AX à l'aide du point de vue du paragraphe 1.2.2.

$$A \times X = x_1 C_1(A) + \cdots + x_p C_p(A).$$

Rappelons que les colonnes de A représentent, relativement à la base $\mathcal{F}$ de F , les images par a des vecteurs de la base $\mathcal{E}$.

$$A \times X = x_1 M_{\mathcal{F}}(a(e_1)) + \cdots + x_p M_{\mathcal{F}}(a(e_p)).$$

L'application $y \mapsto M_{\mathcal{F}}(y)$ est linéaire

$$A \times X = M_{\mathcal{F}}(x_1 a(e_1) + \cdots + x_p a(e_p)).$$

On utilise enfin la linéarité de l'application a .

$$A \times X = M_{\mathcal{F}}(a(x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p)) = M_{\mathcal{F}}(a(x)).$$

La formule annoncée est démontrée. ♡

Cas particulier. Notons $(E_1, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Les colonnes de la matrice A sont alors données par l'identité

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad C_j(A) = A \times E_j.$$

En effet, la matrice $A \times E_j$ représente le vecteur $a(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$. ♡

Réciproque. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in E, \quad M_{\mathcal{F}}(a(x)) = B \times M_{\mathcal{E}}(x).$$

La matrice B est alors égale à la matrice A .

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On applique l'identité au vecteur e_j . On obtient alors

$$M_{\mathcal{F}}(a(e_j)) = B \times M_{\mathcal{E}}(e_j) \quad \text{c'est-à-dire} \quad C_j(A) = B \times E_j = C_j(B).$$

Les matrices A et B ont les mêmes colonnes donc elles sont égales. ♡

4.3 Matrice d'une application linéaire, version « lignes »

Gardons les notations du paragraphe précédent. Pour tout vecteur x de E , le vecteur $a(x)$ est dans F donc il admet une unique décomposition dans la base $\mathcal{F}$ de F , notée

$$a(x) = \ell_1(x)f_1 + \cdots + \ell_n(x)f_n,$$

où $\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)$ sont des scalaires, qui dépendent évidemment de x .

Proposition. Les applications $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont des formes linéaires sur E .

De plus, les matrices lignes $M_{\mathcal{E}}^*(\ell_1), \dots, M_{\mathcal{B}}^*(\ell_n)$ sont les lignes de la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$.

Démonstration. Notons f_1^* la forme linéaire sur F définie par ¹

$$f_1^*(f_1) = 1, \quad f_1^*(f_2) = 0, \quad \dots \quad f_1^*(f_n) = 0.$$

Pour tout vecteur x de E , on obtient alors

$$f_1^*(a(x)) = \ell_1(x) \underbrace{f_1^*(f_1)}_{=1} + \ell_2(x) \underbrace{f_1^*(f_2)}_{=0} + \cdots + \ell_n(x) \underbrace{f_1^*(f_n)}_{=0} = \ell_1(x).$$

L'application ℓ_1 est donc égale à $f_1^* \circ a$. Ça prouve que ℓ_1 est une forme linéaire sur E .

Le fait que $\ell_2, \dots, \ell_n$ soient également des formes linéaires sur E se montre pareillement.

Notons B la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les lignes sont les matrices lignes associées aux formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$ relativement à la base de $\mathcal{E}$ de E .

Soit x un vecteur de E . Appliquons la règle de calcul du paragraphe 3.1.

$$B \times M_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{E}}^*(\ell_1) \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_2) \\ \vdots \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_n) \end{pmatrix} \times M_{\mathcal{E}}(x) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{E}}^*(\ell_1) \times M_{\mathcal{E}}(x) \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_2) \times M_{\mathcal{E}}(x) \\ \vdots \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_n) \times M_{\mathcal{E}}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{F}}(a(x)).$$

D'après l'unicité énoncée au paragraphe 4.2, la matrice B est égale à $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$. ♡

Exemple. Reprenons l'exemple du paragraphe 4.1. L'application a s'écrit

$$a : (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z)f_1 + xf_2 + (3y + z)f_3 + (x - 2y)f_4.$$

Les formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ sont donc données par

$$\begin{cases} \ell_1 : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y - z \\ \ell_2 : (x, y, z) \mapsto x \\ \ell_3 : (x, y, z) \mapsto 3y + z \\ \ell_4 : (x, y, z) \mapsto x - 2y. \end{cases}$$

Les matrices lignes canoniquement associées à ces formes linéaires sont

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}}^*(\ell_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{E}}^*(\ell_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que ce sont bien les quatre lignes de la matrice A du paragraphe 4.1.

Remarque. Dans le cas d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$, la matrice canoniquement associée est plus rapidement remplie ligne par ligne que colonne par colonne. Il suffit de regarder les coordonnées de l'image d'un vecteur quelconque, de les interpréter comme des formes linéaires et de placer les coefficients de ces formes linéaires en ligne.

C'est d'ailleurs valable pour d'autres espaces vectoriels.

Un endomorphisme d'un espace de matrices. Considérons la matrice S suivante

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Rappelons qu'une application linéaire de F vers un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque est définie de manière unique par le choix des images des vecteurs d'une base de F .

On définit un endomorphisme a de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par la formule

$$a : M \mapsto SM - MS$$

et on demande d'écrire la matrice de cet endomorphisme relativement à la base canonique

$$\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour cela, il est hors de question de calculer séparément les images des quatre vecteurs de cette base pour utiliser le principe rappelé au paragraphe 4.1. On calcule plutôt l'image d'un vecteur quelconque.

Prenons donc une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Un calcul peu ragoûtant — et néanmoins pas monstrueux — donne

$$a(M) = \begin{pmatrix} -2b + 2c & -2a + 2d \\ 2a - 2d & 2b - 2c \end{pmatrix} = (-2b + 2c)E_{1,1} + (-2a + 2d)E_{1,2} + (2a - 2d)E_{2,1} + (2b - 2c)E_{2,2}.$$

Les formes linéaires coordonnées de a sont donc

$$\begin{aligned} \ell_{1,1} &: A \mapsto -2b + 2c \\ \ell_{1,2} &: A \mapsto -2a + 2d \\ \ell_{2,1} &: A \mapsto 2a - 2d \\ \ell_{2,2} &: A \mapsto 2b - 2c. \end{aligned}$$

Représentons ces formes linéaires en ligne, pour obtenir finalement

$$M_{\mathcal{E}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Composition d'applications linéaires

5.1 Notations

Comme en 4.1, on se donne deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimension finie, munis respectivement de bases

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n).$$

On se donne également a , une application $\mathbb{K}$ -linéaire de E vers F .

Ajoutons maintenant un troisième $\mathbb{K}$ -espace vectoriel G , dont la notation est notée ℓ , muni d'une base

$$\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_\ell).$$

Considérons alors b , une application $\mathbb{K}$ -linéaire de F vers G .

5.2 Lien avec le produit matriciel

5.2.1 Formule fondamentale

$$\boxed{M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) = M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a).}$$

5.2.2 Première démonstration : argument algébrique

Soit x un vecteur de E .

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times M_{\mathcal{E}}(x) = M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{F}}(a(x)) = M_{\mathcal{G}}(b(a(x))).$$

Or, d'après la propriété d'unicité du paragraphe 4.2, on sait que la seule matrice M vérifiant l'identité

$$\forall x \in E, \quad M \times M_{\mathcal{E}}(x) = M_{\mathcal{G}}(b(a(x)))$$

est la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a)$.

La matrice produit $M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est donc égale à $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a)$. ♡

5.2.3 Deuxième démonstration : version « matrice-colonnes »

Il suffit d'utiliser la version « matrice-colonnes » du produit de deux matrices, vue au paragraphe 1.4.4.

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) &= M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \left(M_{\mathcal{F}}(a(e_1)) \mid \cdots \mid M_{\mathcal{F}}(a(e_p)) \right) \\
 &= \left(M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{F}}(a(e_1)) \mid \cdots \mid M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times M_{\mathcal{F}}(a(e_p)) \right) \\
 &= \left(M_{\mathcal{G}}(b(a(e_1))) \mid \cdots \mid M_{\mathcal{G}}(b(a(e_p))) \right) \\
 &= M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a).
 \end{aligned}$$

5.3 Deuxième formule de changement de bases

Prenons une nouvelle base $\mathcal{E}_0$ de E et une nouvelle base $\mathcal{F}_0$ de F . La matrice de a relativement à ces deux nouvelles bases s'exprime alors ainsi

$$M_{\mathcal{E}_0,\mathcal{F}_0}(a) = M_{\mathcal{F}_0}(\mathcal{F}) \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0).$$

Explication. Soit x un vecteur de E . On dispose de sa matrice dans la base $\mathcal{E}_0$ et on veut le vecteur $a(x)$ exprimé dans la base $\mathcal{F}_0$ mais on ne connaît la matrice de a que relativement aux « anciennes » bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

On commence par traduire x dans la base $\mathcal{E}$, ce qui se fait par le produit $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0) \times M_{\mathcal{E}_0}(x)$.

En multipliant à gauche par $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, on obtient $M_{\mathcal{F}}(a(x))$. Il n'y a plus qu'à traduire ce vecteur dans la « nouvelle » base.

Dans la pratique, les « anciennes » bases sont généralement des bases canoniques et les matrices de changement de bases qui sont connues sont

$$P = M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0) \quad \text{et} \quad Q = M_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_0).$$

La formule de changement de bases devient donc

$$M_{\mathcal{E}_0,\mathcal{F}_0}(a) = Q^{-1} \times M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times P.$$

6 Méthode du pivot

6.1 Réduction de Gauß-Jordan

La réduction de Gauß-Jordan selon les colonnes consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice pour arriver à une matrice échelonnée selon les colonnes et en déduire divers renseignements sur ladite matrice.

Exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Prenons pour premier pivot le premier coefficient non nul de la première ligne.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Amenons-le en première position sur cette même ligne, par l'opération élémentaire $C_1 \leftrightarrow C_3$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 8 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Utilisons ce pivot pour annuler tous les autres coefficients de la première ligne. Les opérations sont

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_1, \quad C_5 \leftarrow C_5 - 2C_1, \quad C_6 \leftarrow C_6 - 3C_1.$$

La matrice obtenue est

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & -6 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 8 & 12 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Sur la deuxième ligne, prenons pour pivot le premier coefficient non nul hors de la première colonne. C'est le coefficient 1 de la deuxième colonne.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 2 & 3 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & -6 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 8 & 12 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Utilisons ce coefficient pour annuler tous les autres coefficients de cette même ligne à droite du pivot (dans certaines versions de cet algorithme — par exemple, quand on calcule l'inverse d'une matrice —, on annule tous les coefficients de cette même ligne autres que le pivot).

On effectue les opérations

$$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2, \quad C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2, \quad C_5 \leftarrow C_5 + 6C_2, \quad C_6 \leftarrow C_6 + 4C_2.$$

La matrice obtenue est

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -15 & -15 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 33 & 33 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on prend comme troisième pivot le -15 de la cinquième colonne et on effectue l'opération $C_6 \leftarrow C_6 - C_5$, pour obtenir la réduite de Gauss

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & \boxed{-15} & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les implications algébriques de ce calcul seront présentées plus loin.

6.2 Traduction matricielle des opérations élémentaires sur les colonnes

6.2.1 Ajout d'un multiple d'une colonne à une autre colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Prenons deux indices de colonnes distincts j et k . Prenons un scalaire λ et effectuons l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$.

La matrice obtenue se présente ainsi en colonnes

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} C_1(A) & \cdots & C_{j-1}(A) & C_j(A) + \lambda C_k(A) & C_{j+1}(A) & \cdots & C_p(A) \end{array} \right).$$

On observe que chaque colonne de cette nouvelle matrice est une combinaison linéaire des colonnes de A . Cette matrice est donc obtenue en multipliant la matrice A à droite par une matrice, qui comporte sur ses colonnes les coefficients des combinaisons linéaires en question. Cette matrice, notée $T_{k,j}(\lambda)$, a exactement les mêmes coefficients que la matrice I_p , sauf le coefficient en position (k,j) , qui vaut λ .

Exemple. Prenons une matrice A avec 4 colonnes² et effectuons l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_4$. La matrice obtenue est alors

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1(A) & C_2(A) + 3C_4(A) & C_3(A) & C_4(A) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1(A) & C_2(A) & C_3(A) & C_4(A) \end{array} \right) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{4,2}(3)}.$$

Questions. Quel est l'inverse de la matrice $T_{i,j}(\lambda)$?

Quelle opération élémentaire effectue-t-on si on multiplie une matrice à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$?

6.2.2 Échange de deux colonnes

Soient j et k deux indices entre 1 et p . L'opération d'échange des colonnes $C_j(M)$ et $C_k(M)$ est notée $C_j \leftrightarrow C_k$. Effectuer cette opération revient à multiplier la matrice M à droite par la matrice $P_{j,k}$ obtenue à partir de la matrice identité I_p en échangeant ses colonnes d'indices j et k (remarquons que $P_{j,k}$ et $P_{k,j}$ sont égales).

Exemple.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}}_M \times P_{1,3} = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1(M) & C_2(M) & C_3(M) \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} C_3(M) & C_2(M) & C_1(M) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Question. Qu'obtient-on en multipliant une matrice M à gauche par une matrice du type $P_{j,k}$?

6.2.3 Multiplication d'une colonne par une constante

Multiplier la k -ième colonne de M par la constante λ revient à multiplier la matrice M à droite par la matrice identité I_p , dont on a remplacé le k -ième coefficient diagonal par λ .

L'opération est notée $C_k \mapsto \lambda C_k$.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_1(M) & C_2(M) & C_3(M) \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1(M) & 2C_2(M) & C_3(M) \end{array} \right).$$

Question. Par quelle matrice multiplie-t-on M à gauche pour multiplier la ligne $L_i(M)$ par λ ?

6.3 Bases extraites

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$.

Dans cet espace, prenons la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6), \text{ avec} \\ P_1 &= 8X^3 - 4X^2 + 2X, & P_2 &= 4X^3 - 2X^2 + X, & P_3 &= -3X^3 + 2X^2 + 2X + 1, \\ P_4 &= 9X^3 - 4X^2 + 5X + 1, & P_5 &= 3X^3 + X^2 - 2X + 2, & P_6 &= 8X^3 - X^2 + 2X + 3. \end{aligned}$$

On demande de trouver une base de $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Pour cela, commençons par représenter la famille $\mathcal{F}$ matriciellement.

$$A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit bien sûr de la matrice prise en exemple au paragraphe 6.1. Chaque opération effectuée pendant la réduction de Gauß transforme la famille $\mathcal{F}$ en une famille qui a la particularité d'engendrer le même espace. Le fait d'effectuer ces transformations directement sur la matrice A permet de laisser de côté les polynômes et de se concentrer sur les calculs, mais l'interprétation finale doit être formulée en termes de polynômes.

². Le nombre de lignes n'a aucune importance.

Rappelons que la réduite de Gauß obtenue pour cette matrice A est

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & \boxed{-15} & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 33 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que le sous-espace vectoriel F est engendré par la famille $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6)$, avec

$$Q_1 = -3X^3 + 2X^2 + 2X + 1, \quad Q_2 = 4X^3 - 2X^2 + 1, \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad Q_5 = 33X^3 - 15X^2, \quad Q_6 = 0.$$

On peut oublier les termes nuls et dire que F est engendré par la famille (Q_1, Q_2, Q_5) . Cette famille est échelonnée selon la base $\mathcal{B}$ (on dit aussi qu'elle est *échelonnée en valuation*) donc c'est une famille libre.

La famille $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_5)$ est donc une base de F.

6.4 Supplémentaires

L'avantage d'avoir pris une base échelonnée de F, c'est qu'il est très facile de la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Représentons cette famille dans la base canonique.

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -15 \\ -3 & 4 & 33 \end{pmatrix}.$$

Pour compléter la famille $\mathcal{Q}$ dans une base, il suffit de trouver un vecteur dont la colonne représentative complète la matrice ci-dessus en une matrice inversible.

Le choix le plus simple de matrice inversible ainsi construite est bien sûr

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -15 & 0 \\ -3 & 4 & 33 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (Q_1, Q_2, Q_5, X^3) est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On en déduit que la droite vectorielle $G = \text{Vect}(X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

6.5 Détermination de l'image d'une matrice

Rappel (ou pas). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'image de la matrice A est l'ensemble

$$\text{Im}(A) = \{A \times X ; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

C'est en fait l'image de l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après la vision du paragraphe 1.2.2, on remarque que quand la matrice colonne X parcourt $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, le produit $A \times X$ décrit toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A. Une caractérisation de l'image de la matrice A est donc

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A)).$$

On a vu au paragraphe 6.3 que la réduction de Gauß-Jordan donne une base de l'espace engendré par les colonnes de A. C'est donc une base de l'image de la matrice A.

Exemple. Prenons la matrice A des paragraphe précédents. La réduction de Gauß-Jordan montre qu'une base de l'image de A est la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 33 \end{pmatrix} \right).$$

6.6 Détermination du noyau d'une matrice

Rappel (ou pas). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Le noyau de la matrice A est l'ensemble

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} ; A \times X = 0\}.$$

Le vecteur nul de l'équation $A \times X = 0$ est le vecteur nul de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le noyau de A est en fait le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Le paragraphe 1.2.2 nous donne l'expression

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 C_1(A) + \cdots + x_p C_p(A).$$

Par conséquent, les matrices colonnes qui appartiennent au noyau de A sont celles dont les coefficients donnent une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice A .

Exemple. Prenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Voici, en vrac, quelques combinaisons linéaires nulles des colonnes de A

$$C_1(A) - C_2(A) = 0, \quad C_2(A) - C_3(A) = 0, \quad C_1(A) - C_4(A) = 0, \quad C_1(A) + 2C_2(A) - 4C_3(A) + C_4(A) = 0.$$

On en déduit, toujours en vrac, quelques éléments du noyau de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, avec des coefficients plus compliqués ou une matrice de rang plus grand, on ne trouvera pas si facilement des relations entre les colonnes. De plus, trouver quelques éléments du noyau, ça ne nous avance pas beaucoup. Ce qu'on veut, c'est une base de $\text{Ker}(A)$.

Une telle base est justement donnée par la méthode du pivot, au prix d'une simple manipulation supplémentaire, qui sera illustrée par la matrice A du paragraphe 6.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes $C_1(A), \dots, C_6(A)$ sont égales aux produits $AE_1, \dots, AE_6$, où $(E_1, \dots, E_6)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{K})$. Nous allons le rappeler en mettant des étiquettes $E_1, \dots, E_6$ en dessous des colonnes de cette matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{pmatrix}.$$

Reprenons maintenant le calcul du paragraphe 6.1, en effectuant les opérations sur la dernière ligne aussi.

On effectue d'abord $C_1 \leftrightarrow C_3$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 8 & 9 & 3 & 8 \\ E_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_5 & E_6 \end{pmatrix}.$$

Le nouvel étiquetage de la dernière ligne est pertinent car les colonnes représentées valent $AE_3, AE_2, AE_1, AE_4, AE_5, AE_6$ dans cet ordre.

On effectue ensuite

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_1, \quad C_5 \leftarrow C_5 - 2C_1, \quad C_6 \leftarrow C_6 - 3C_1,$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & -6 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 8 & 12 & 9 & 17 \\ E_3 & E_2 & E_1 & E_4 - E_3 & E_5 - 2E_3 & E_6 - 3E_3 \end{pmatrix}.$$

À nouveau, l'étiquetage de la dernière ligne est pertinent. La quatrième colonne vaut bien $A \times (E_4 - E_3)$ et ainsi de suite.

Je ne décris pas en détail les étapes suivantes. La forme finale est

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & \boxed{-15} & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ E_3 & E_2 & E_1 - 2E_2 & E_4 - E_3 - 3E_2 & E_5 - 2E_3 + 6E_2 & E_6 - E_5 - E_3 - 2E_2 \end{pmatrix}.$$

Cette « réduite augmentée » nous informe que les matrices colonnes

$$E_1 - 2E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 - E_3 - 3E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 - E_5 - E_3 - 2E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont dans le noyau de A .

Ces trois colonnes forment une famille libre (car les six colonnes mentionnées en dernière ligne forment une base de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{K})$). De plus, le noyau de A est de dimension 3 (c'est donné par la formule du rang). Ces trois colonnes forment donc une base de $\text{Ker}(A)$.

Exercice. Trouver une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{K})$.

6.7 Caractérisation du rang d'une matrice

Pour commencer, rappelons un théorème d'algèbre linéaire abstraite.

Théorème de l'isomorphisme induit. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (sans hypothèse de dimension). Soit a une application $\mathbb{K}$ -linéaire de E vers F .

On suppose qu'on connaît un supplémentaire E' de $\text{Ker}(a)$ dans E . Alors l'application linéaire

$$\begin{aligned} \tilde{a} : E' &\rightarrow \text{Im}(a) \\ x &\mapsto a(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. ♠

Ce théorème a pour corollaire classique la formule du rang dans le cas où E est de dimension finie.

Un autre corollaire, dans le cas où E et F sont tous deux de dimension finie, est l'énoncé qui suit.

Corollaire (caractérisation du rang d'une matrice). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note r son rang.

Il existe alors deux matrices inversibles Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et P dans $\text{GL}_p(\mathbb{K})$ vérifiant l'égalité

$$Q^{-1} \times A \times P = J_{n,p,r},$$

où la notation $J_{n,p,r}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui admet l'écriture par blocs suivante

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration du corollaire. On reprend les notations $E, F, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ du paragraphe 5.1 et on choisit l'application linéaire a de E vers F qui est représentée par la matrice A relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Notons E' un supplémentaire de $\text{Ker}(a)$ dans E . En concaténant une base de E' et une base de $\text{Ker}(a)$, on obtient une base $\mathcal{E}_0 = (d_1, \dots, d_p)$ de E .

La famille extraite $(d_1, \dots, d_r)$ est alors une base de E' .

D'après le théorème de l'isomorphisme induit, la famille $(a(d_1), \dots, a(d_r))$ est alors une base de $\text{Im}(a)$. C'est donc une famille libre de F , que l'on peut compléter en une base $\mathcal{F}_0 = (g_1, \dots, g_n)$ de F (on a posé $g_k = a(d_k)$ pour tout indice k entre 1 et r).

La matrice de a relativement aux bases $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{F}_0$ est alors $J_{n,p,r}$ (je laisse au lecteur ou à la lectrice le soin de le justifier).

Il suffit maintenant de choisir $P = M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0)$ et $Q = M_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_0)$ et d'appliquer la formule de changement de bases du paragraphe 5.3 pour conclure. ♥

Si j'ai reproduit intégralement cette démonstration, c'est pour mettre en évidence le fait que chaque étape peut être effectuée de manière pratique au moyen de la méthode du pivot.

Je vais d'ailleurs l'illustrer en mettant la dernière main à l'exemple qui a traversé toute cette partie 6.

6.8 Allons jusqu'au bout du fil rouge

Revenons à notre matrice exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu que cette matrice est de rang 3. Il est donc possible de trouver une matrice P dans $\text{GL}_6(\mathbb{R})$ et une matrice Q dans $\text{GL}_4(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$Q^{-1} \times A \times P = J_{4,6,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but de ce paragraphe est de calculer de telles matrices P et Q en appliquant la méthode décrite dans la démonstration du paragraphe précédent. On va voir que tous les calculs nécessaires ont déjà été faits.

Notons $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_6)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On a vu au paragraphe 6.6 qu'une base du noyau de A est (D_4, D_5, D_6) , où l'on a posé

$$D_4 = E_1 - 2E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_5 = E_4 - E_3 - 3E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_6 = E_6 - E_5 - E_3 - 2E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Pour cela, rejetons un coup d'œil à la réduite de Gauß calculée au paragraphe 6.6, avec sa ligne supplémentaire.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & \boxed{-15} & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 33 & 0 \\ E_3 & E_2 & E_1 - 2E_2 & E_4 - E_3 - 3E_2 & E_5 - 2E_3 + 6E_2 & E_6 - E_5 - E_3 - 2E_2 \end{pmatrix}.$$

Concentrons-nous sur la dernière ligne. Initialement, c'était juste la base $\mathcal{E}$. On lui a fait subir uniquement des opérations élémentaires donc les vecteurs mentionnés dans cette dernière ligne forment encore une base de $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$.

Trois d'entre eux sont D_4, D_5, D_6 . Il suffit donc de prendre les trois autres pour D_1, D_2, D_3 , par exemple

$$D_1 = E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = E_5 - 2E_3 + 6E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel $E' = \text{Vect}(D_1, D_2, D_3)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$.

Comme on l'a déjà dit au paragraphe 6.5, l'image de A admet une base constituée des colonnes

$$G_1 = A \times D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad G_2 = A \times D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad G_3 = A \times D_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

On complète la famille (G_1, G_2, G_3) en une base $\mathcal{F}_0 = (G_1, G_2, G_3, G_4)$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ en prenant

$$G_4 = F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour répondre à la question, il suffit de prendre

$$P = M_{\mathcal{E}}(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Q = M_{\mathcal{F}}(G_1, G_2, G_3, G_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -15 & 0 \\ -3 & 4 & 33 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Lien avec les produits scalaires

Ce paragraphe sera présenté en classe dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels.

8 Exercices

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, à part ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne, qui valent 1.

a. Déterminer le noyau et l'image de A .

b. On note φ_A l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que φ_A laisse stable $\text{Im}(A)$. On note ϕ_A l'endomorphisme de $\text{Im}(A)$ induit par φ_A .

c. Construire une matrice représentative de ϕ_A relativement à une base bien choisie.

Montrer que ϕ_A est un automorphisme de $\text{Im}(A)$.

d. Calculer A^2 par la méthode « matrice-colonnes » du paragraphe 1.4.4.

Exercice 2. (Matrices de permutations) On fixe un entier $n \geq 2$. Soit σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit E un espace vectoriel de dimension n . On considère une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E .

a. On pose

$$\mathcal{B}_\sigma = (b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}).$$

Montrer que $\mathcal{B}_\sigma$ est une base de E .

b. On note P_σ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_\sigma$.

Montrer la formule

$$(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

c. Montrer l'identité

$$P_\sigma \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On note $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étant donné quatre indices i, j, k, ℓ entre 1 et n , calculer le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$ par plusieurs méthodes :

1. par la méthode « lignes-colonnes » ;
 2. par la méthode « matrice-colonnes » ;
 3. par la méthode « lignes-matrice » ;
 4. en composant deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n .
-

Exercice 4. On considère une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note D_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto MA$.

Écrire la matrice de D_A relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{n,n})$.

Exercice 5. On prend $z_1, \dots, z_n$ distincts dans $\mathbb{C}$ et on crée la *matrice de Vandermonde*

$$\text{VdM}(z_1, \dots, z_n) = ((z_j)^{k-1})_{1 \leq j, k \leq n}.$$

Montrer que le noyau de cette matrice est trivial (on montrera qu'un certain polynôme a « trop » de racines). Qu'en déduit-on ?

Exercice 6. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. On suppose qu'elles ont le même noyau et la même image.

Montrer alors qu'elles sont proportionnelles.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice canoniquement associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réduire la matrice A par la méthode de Gauß. En déduire :

1. le rang de f , noté r ;
 2. une base de $\text{Ker}(f)$;
 3. un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$;
 4. une base de $\text{Im}(f)$;
 5. un supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$;
 6. deux matrices inversibles P et Q telles que $Q^{-1}AP = J_{3,4,r}$.
-