Devoir de vacances de mathématiques — PC*

Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling (*)

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1.

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2}\,\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver les relations suivantes

$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Le but de cette partie est de prouver que $n!$ est équivalent à $n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\dfrac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p}\,\mathrm{W}_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1. **Identité de Vandermonde (*)**

Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N}^3$. Démontrer par deux méthodes l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Méthode 1. Partir de l'égalité $(\mathrm{X}+1)^a(\mathrm{X}+1)^b = (\mathrm{X}+1)^{a+b}$ et se concentrer sur un coefficient bien choisi.

Méthode 2. Combien y a-t-il de manières de sélectionner une équipe de n personnes à partir d'une population de a hommes et b femmes ?

Exercice 2. $\boxed{\textbf{Inégalité de Jensen (*)}}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, supposée convexe.

a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, prouver la propriété (C_n) suivante : pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de I, pour tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ d'éléments de $[0, 1]$ dont la somme vaut 1, l'inégalité

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

est valable.

On raisonnera par récurrence.

b. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ est inclus dans I. Montrer alors l'inégalité

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X})).$$

Exercice 3. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$.

a. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

b. On suppose que f est une fonction symétrique, ce qui s'écrit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(y, x).$$

Quelle relation obtient-on entre les dérivées partielles de f ?

Exercice 4. (**) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x, y) = \dfrac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

On considère l'ensemble $\mathrm{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \neq y\}$. On admet que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1 - q(x, y)^2$.

b. En déduire que la fonction $f : (x, y) \mapsto \mathrm{Arccos}(q(x, y))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et exprimer ses dérivées partielles d'ordre 1.

d. En déduire une simplification de l'expression $f(x, y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. $\boxed{\textbf{Nombre de surjections (**)}}$

Pour tout couple $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathrm{S}(n, p)$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, p]\!]$.
Par convention, on pose $\mathrm{S}(n, 0) = 0$ et $\mathrm{S}(0, n) = 0$ si $n \geqslant 1$; on pose également $\mathrm{S}(0, 0) = 1$.

Le but de cet exercice est d'obtenir la formule générale suivante

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{S}(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

a. En partitionnant l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, p]\!]$ selon le cardinal de leur image, prouver la relation

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{S}(n, k).$$

b. Conclure.

c. Quelle formule obtient-on dans le cas $p = n$? dans le cas $p > n$?

Problème 2

Première partie (quelques calculs préliminaires)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$. On note φ la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

Question 13. Justifier les inclusions $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Question 14. Démontrer les égalités $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Question 15. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation u^k désigne l'itérée k-ième d'ordre k, c'est-à-dire la composée $u \circ \cdots \circ u$, dans laquelle la lettre u apparaît k fois. En particulier, la notation u^0 désigne Id_{E}. On note n la dimension de E.

Question 16. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.

Question 17. Montrer que la suite de terme général $\delta_k = \mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1})$ est décroissante.

Question 18. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$, on ait $\delta_k = 0$. Dans la suite, on choisit p minimal pour cette propriété.

Question 19. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.

Question 20. On note v la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^p)$. Montrer que v est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^p)$.

Troisième partie (endomorphismes nilpotents)

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme u de E et l'entier p. On suppose de plus que u est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier s tel que u^s soit l'application nulle.

Question 21. Montrer que u^p est l'application nulle mais pas u^{p-1}.

Question 22. Montrer l'inégalité $p \leqslant n$.

Question 23. Dans cette question, on ajoute l'hypothèse $p = n$. On considère un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et on lui associe la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et écrire la matrice de u relativement à cette base.

Problème 3 (**)

On pose $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. On lui associe les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}\ ;\ f(0) = f(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}\ ;\ f'' = f\}.$$

Pour tout couple (f, g) d'éléments de E, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

a. Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

b. Déterminer une base orthonormée de G.

c. Montrer que F et G sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

d. Donner l'expression de la projection orthogonale sur G.

Problème 4 (***) On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et on pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[\![0, n_0]\!] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

c. Pour tout entier $n \geqslant n_1$, prouver la majoration

$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \varepsilon.$$

d. Conclure.

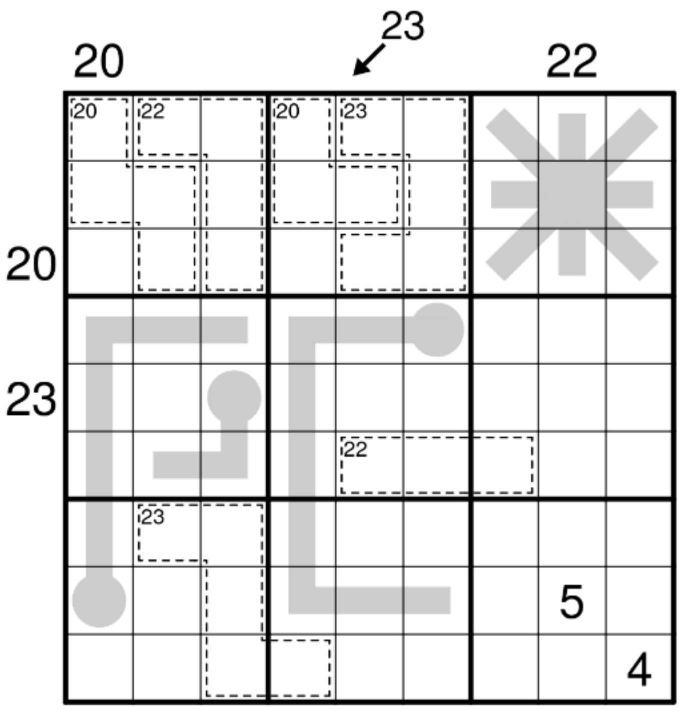
Exercice 6. (**) Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices inversibles.

Exercice 7. (**) Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrices de projection.

Sudoku « PC* 2022-2023 »

Chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 3×3 délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre de 1 à 9.
Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe.
L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.
Dans chaque cage délimitée en pointillés, les chiffres sont tous différents et leur somme est indiquée dans un coin de la cage.
Chaque nombre accompagné d'une flèche est la somme des chiffres sur la mini-diagonale indiquée par la flèche.
Chaque nombre dans la marge est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la ligne/colonne correspondante.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : `https://git.io/JnDe7`



Pour me contacter : `edouardlebeau-pc@yahoo.fr` ou `Édouard Lebeau#3705` sur Discord.

Site de la classe (lien cliquable) : `http://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare`