Complément pour les 5/2

1 Fonctions convexes

Je renvoie à ce poly de mon collègue David Blottière : lien cliquable.
Le paragraphe 1.3 sur les barycentres n'est pas nécessaire mais il ne manque pas d'intérêt.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{C})$.
Pour tout couple (a, b) d'éléments de I, on note $\mathrm{S}(a, b)$ le segment d'extrémités a et b.
L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant ||f^{(n+1)}||_{\infty,\mathrm{S}(a,b)} \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 1. (*) Démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 2. (*) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

a. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ pour le choix $(a, b) = (0, x)$.

b. Qu'obtient-on en faisant tendre n vers $+\infty$?

---

3 Théorème du rang : version géométrique

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
Soit H un sous-espace vectoriel de E. On suppose que H et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.
On définit alors la double restriction $\tilde{u} : x \mapsto u(x)$ de H vers $\mathrm{Im}(u)$.

La version géométrique du théorème du rang affirme que $\tilde{u}$ est un isomorphisme.

Exercice 3. (*) Démontrer cette propriété.

Exercice 4. (*) Déduire de cette propriété une démonstration du théorème du rang.

Exercice 5. (*) On suppose que E et F sont de dimension finie. On pose $p = \dim(\mathrm{E})$ et $n = \dim(\mathrm{F})$.
On pose aussi $r = \mathrm{rg}(u)$.

Construire une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. $\boxed{\textbf{Lemme de factorisation (***)}}$ Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Montrer que l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(v)$ équivaut à l'existence de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ telle que $v = u \circ f$.

4 Fractions rationnelles

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On note A l'ensemble $\mathbb{C} \backslash \{a_1, \dots, a_n\}$ et on introduit le polynôme

$$\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k).$$

Théorème. Pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il existe un unique $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall z \in \mathrm{A}, \quad \frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{P}(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{z - a_k}.$$

De plus, les coefficients s_k sont donnés par

$$s_k = \frac{\mathrm{Q}(a_k)}{\mathrm{P}'(a_k)} = \mathrm{Q}(a_k) \times \left(\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} (a_k - a_\ell) \right)^{-1}.$$

Exercice 7. (**) À l'aide des polynômes de Lagrange, démontrer cette propriété.

Exercice 8. (*) Qu'obtient-on en réduisant $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z - a_k}$ au même dénominateur ?

Exercice 9. (Lu sur Twitter) (*) On suppose que les a_k sont non nuls. Pour tout $r \in [\![0, n-2]\!]$, prouver l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^r}{\mathrm{P}'(a_k)} = 0.$$

Exercice 10. (*) Soit un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Exercice 11. (*) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{1 - \omega^k}$.

Exercice 12. (**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$.

a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, vérifier l'identité

$$\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 \cos(2\theta) + 1 = (\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} \cos(\theta) + 1)(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} \cos(\theta) + 1).$$

b. En déduire un calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}x$ puis de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 1} \, \mathrm{d}x$.

---

5 Formes linéaires et hyperplans

5.1 Formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, est parfois noté E^* et appelé *dual* de E. Toutefois, ce terme et cette notation n'apparaissent pas dans le programme.

Dans le cas où E est de dimension finie, on peut observer que E et E^* ont la même dimension.

Exemples.

1. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Si E est un espace préhilbertien réel, alors pour tout vecteur h de E, l'application $x \mapsto (h|x)$ est une forme linéaire sur E.
3. La partie réelle et la partie imaginaire sont des formes linéaires sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
4. Les applications du type « évaluation en un point », c'est-à-dire de la forme $f \mapsto f(x_0)$, sont des formes linéaires sur tous les espaces de fonctions et sur tous les espaces de polynômes.

Représentation matricielle.

On suppose que E est de dimension finie et on considère une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$. La famille $\mathcal{F} = (1)$ est alors la base canonique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

Si ℓ est une forme linéaire sur E, alors sa matrice relative aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Pour en savoir plus, je renvoie à mon poly sur le calcul matriciel : lien cliquable.

Exercice 13. (*) Étant donné deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ de E, trouver, avec démonstration, une formule de changement de base reliant les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\ell)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{D},\mathcal{F}}(\ell)$.

5.2 Hyperplans

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

Dire que H est un *hyperplan* de E signifie qu'il existe un vecteur a non nul de E tel que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Remarques.

1. Si un tel a existe, il n'est pas unique, puisque tout multiple non nul de a convient également.
2. Dans le cas où E est de dimension finie, la définition ci-dessus équivaut à l'égalité $\dim(\mathrm{H}) = \dim(\mathrm{E}) - 1$. Cette formule peut même être considérée comme la définition d'un hyperplan dans ce cas — le cas de dimension infinie n'est officiellement pas au programme.

Exercice 14. (*) On suppose que a est un vecteur non nul tel que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Montrer que les vecteurs b tels que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(b)$ sont exactement ceux tels que $b \notin \mathrm{H}$.

Exercice 15. (*) Soit ℓ une forme linéaire sur E. Vérifier que $\mathrm{Ker}(\ell)$ est un hyperplan de E.

Exercice 16. (*) Réciproquement, soient H un hyperplan de E et a un vecteur non nul de E tel que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire ℓ non nulle sur E telle que le projecteur sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à H soit l'application

$$x \mapsto \ell(x)a.$$

Vérifier aussi que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(\ell)$.

Exercice 17. (*) Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E. Soit φ une forme linéaire sur E.

Montrer l'équivalence

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\ell) \iff \mathrm{Ker}(\ell) \subset \mathrm{Ker}(\varphi).$$
