

Chapitre 1 — polynômes et calcul matriciel

1 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Problème d'interpolation : étant donné a_1, \dots, a_n distincts dans \mathbb{K} et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, trouver les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(a_k) = b_k.$$

Unicité d'une solution dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Base de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Expression du reste de la division euclidienne d'un polynôme quelconque par $(X - a_1) \cdots (X - a_n)$.

Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.

Matrice de Vandermonde. Calcul du déterminant.

2 Calcul matriciel

Produit matriciel : expressions des coefficients ; colonnes ; lignes. Lien avec les opérations du pivot.

Application linéaire de $U \mapsto A \times U$ canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, définie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Noyau d'une matrice, image d'une matrice.

3 Trace

Trace d'une matrice carrée : c'est la somme de ses coefficients diagonaux. Identité $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

Identité $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Identité $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

Trace d'un endomorphisme. Trace d'un projecteur.

4 Polynômes de matrices et polynômes d'endomorphismes

Rappel sur les matrices semblables. Formule $(P^{-1}MP)^k = P^{-1}M^kP$.

Polynômes de matrices. Polynômes d'endomorphismes.

Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Corollaire : les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Si u et v commutent, alors $P(u)$ et $Q(v)$ commutent.

5 Polynômes annulateurs

Polynômes annulateurs d'une matrice.

Existence d'un polynôme annulateur. Cas des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Calcul des puissances d'une matrice. Calcul de l'inverse.