Exercice 1. **(*)** Factoriser le polynôme $(\mathrm{X}+\mathrm{i})^n - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Exercice 2. **(*)** Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. **(*)** Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$. Soit $(m_1, \ldots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

On pose $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P.

Exercice 4. **(*)** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes distincts. On pose

$$\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k).$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

a. Qu'obtient-on en réduisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}$ au même dénominateur ?

b. Pour tout $r \in [\![0, n-2]\!]$, prouver l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^r}{\mathrm{P}'(a_k)} = 0.$$

Exercice 5. **(*)** Soit un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Exercice 6. **(*)** Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$.

Exercice 7. **(*)** On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$.

Exercice 8. **(*)** On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible.

b. En déduire une expression des puissances de A.

c. Vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9. **(**)** On considère l'endomorphisme $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} - \mathrm{P}'$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

a. Trouver un polynôme annulateur de f.

b. En déduire que f est bijectif et déterminer son inverse.
