**Problème 1 — Polynômes de Legendre (**)**

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt.$$

Pour tout entier $n$, on pose $A_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{2^n \times n!}(A_n)^{(n)}$. Les polynômes $P_n$ sont les *polynômes de Legendre.*

**Question 1.** Calculer $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

**Question 2.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, montrer que $P_n$ possède la même parité que $n$. Préciser son degré et son coefficient dominant.

**Question 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer l'égalité

$$(A_n^{(n)}|Q) = (-1)^k (A_n^{(n-k)}|Q^{(k)}).$$

**Question 4.** En déduire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

**Question 5.** Exprimer $||A_n^{(n)}||^2$ en fonction d'une intégrale de Wallis puis en déduire la valeur de $||P_n||$.

**Question 6.** Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$\left((X^2-1)\times(X^2-1)^n\right)^{(n+2)} = \left(\left((X^2-1)^{n+1}\right)'\right)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1-X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

**Question 7.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction

$$f_n : t \mapsto (P_n(t))^2 + \frac{1-t^2}{n(n+1)}(P_n'(t))^2.$$

En déduire que l'inégalité $|P_n(t)| \leqslant 1$ est valable pour tout $t$ dans $[-1,1]$.

**Question 8.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer qu'il existe $(a_{n,0},\dots,a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k.$$

**b.** Montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$ ainsi que pour $k=n$.

**c.** Préciser les valeurs de $a_{n,n-1}$ et de $a_{n,n+1}$ puis en déduire une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

**d.** Calculer ainsi les polynômes $P_3$, $P_4$ et $P_5$.

**Question 9. (***)** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $P_n$ est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

**a.** Première méthode : utiliser le théorème de Rolle à répétition.

**b.** Deuxième méthode : noter $a_1,\dots,a_s$ les racines de $P_n$ de multiplicité impaire appartenant à $]-1,1[$ et considérer le polynôme $Q = (X-a_1)\cdots(X-a_s)$.

Montrer que la fonction polynomiale $P_nQ$ est de signe constant sur $[-1,1]$ et en déduire à l'aide de la question 3 que $s \geqslant n$.

**Exercice 1.** **Un calcul de $\zeta(2)$ (*)**

Le but de cet exercice est de montrer la formule remarquable suivante

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur étonnante a été découverte par L. Euler en 1735, mais la démonstration qui suit — considérée communément comme la plus élémentaire de toutes — date de 1973.

On fixe un entier strictement positif $n$ et on introduit le polynôme

$$\mathrm{P}_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \, \mathrm{X}^{n-p}.$$

On introduit la fonction *cotangente*, définie sur $]0, \pi[$ par la formule

$$\mathrm{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

**1.** Montrer l'égalité

$$(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1} - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1} = 2\mathrm{i}\mathrm{P}_n(\mathrm{X}^2).$$

**2.** Pour tout $t$ dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{cotan}^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

**3.** En déduire que les racines du polynôme $\mathrm{P}_n$ sont les nombres $\mathrm{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, où l'indice $k$ parcourt $[\![1, n]\!]$.

**4.** En déduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

**5.** On définit sur $]0, \pi/2]$ la fonction $\varphi : t \mapsto t \ \mathrm{cotan}(t)$.

**a.** Pour tout $t$ dans $[0, \pi/2]$, prouver la majoration $\sin(t) \leqslant t$.

**b.** Pour tout $t$ dans $]0, \pi/2]$, prouver l'égalité

$$\varphi'(t) = \frac{\cos(t)\sin(t) - t}{\sin^2(t)}.$$

**c.** En déduire les variations de $\varphi$ sur $]0, \pi/2]$ (on donnera notamment la limite en 0).

**6.** Pour tout $t$ dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, montrer l'encadrement

$$\frac{1}{t^2} - 1 \leqslant \mathrm{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

**7.** En déduire la valeur de la somme attendue.

---

**Exercice 2. (*)** Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que l'univers image $\mathrm{X}(\Omega)$ est inclus dans $[\![1, n]\!]$. Prouver alors la formule

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k).$$

---