Exercice 1. **Décompositions de noyaux (*)**

Partie I — cas scindé à racines simples

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E.

On considère deux nombres complexes a et b distincts. On note $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ associée au couple (a, b). On note P le polynôme $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Question 1. Rappeler l'expression de L_1 et L_2.

Question 2. Rappeler la décomposition du polynôme 1 dans la base $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$.

Question 3. Montrer l'égalité $\operatorname{Ker}(\mathrm{P}(f)) = \operatorname{Ker}(f - a\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et préciser les projecteurs associés.

Question 4. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : y \mapsto y'$.
Que donne le résultat de la question 3 dans ce cadre ?

Question 5. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Que donne le résultat de la question 3 dans ce cadre ?

Partie II — cas avec une racine double

On garde les notations de la question précédente et on note Q le polynôme $(\mathrm{X}-a)^2(\mathrm{X}-b)$.

Le but de cette partie est de montrer l'égalité

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{Q}(f)) = \operatorname{Ker}((f - a\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

et d'appliquer ce résultat dans deux cadres familiers.

Question 6. Trouver $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité polynomiale suivante

$$\lambda(\mathrm{X}-a)^2 + \mu(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) + \nu(\mathrm{X}-b) = 1.$$

Question 7. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$\mathrm{F} = \operatorname{Ker}((f - a\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \operatorname{Ker}(f - b\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$$

sont en somme directe.

Question 8. Montrer ensuite l'égalité annoncée.

Question 9. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Question 10. Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 4u_{n+1} - 8u_n = 0.$$

Exercice 2. **Série des intégrales de Wallis (*)**

Question 11. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, prouver la minoration $\sin(t) \geqslant 2t/\pi$.

Question 12. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{W}_n$ est divergente.

Exercice 3. (**) Soient E et F deux espaces euclidiens. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Question 13. Soit y dans F. Montrer qu'il existe x dans $(\mathrm{Ker}(f))^\perp$ et y' dans $(\mathrm{Im}(f))^\perp$ vérifiant l'égalité $y = f(x)+y'$.

Montrer de plus qu'un tel couple (x, y') est unique. Le vecteur x est alors noté $g(y)$, ce qui définit une application g de F vers E.

Question 14. Montrer que g est linéaire. Préciser son noyau et son image.

Question 15. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs, à caractériser.

Question 16. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que f est canoniquement représentée par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à g.

Exercice 4. **Quelques études de séries (***)**

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que l'un au moins des trois nombres $\cos^2(n-1)$, $\cos^2(n)$ et $\cos^2(n+1)$ est supérieur ou égal à $1/2$.

Indication. On pourra utiliser l'encadrement $\frac{\pi}{4} \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, et s'aider d'un dessin.

En déduire que la série de terme général $\frac{\cos^2(n)}{n}$ est divergente. Pour cela, on minorera $\sum\limits_{n=1}^{3\mathrm{N}} \dfrac{\cos^2(n)}{n}$.

Question 18. On se propose maintenant de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \cos(n)$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité $\mathrm{S}_n = \dfrac{\cos(\frac{n+1}{2})\ \sin(\frac{n}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$, puis la majoration $|\mathrm{S}_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2})}$.

b. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{S}_\mathrm{N}}{\sqrt{\mathrm{N}+1}} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{S}_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{S}_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ converge absolument.

d. Conclure.

Question 19. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.

Exercice 5. (***) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.

Question 20. On suppose que u_n est équivalent à v_n et que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ est équivalent à $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Question 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ.

Question 22. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
