

Chapitre 3 — séries numériques

1 Séries numériques

1.1 Vocabulaire et notations

Série numérique $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle $S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n$.

Série convergente. Somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

1.2 Séries de référence

Série géométrique. Série de Riemann. Série exponentielle. Les autres seront vues plus tard.

1.3 Propriétés algébriques

Stabilité par combinaison linéaire. Attention, ce n'est pas stable par produit.

Le produit de Cauchy sera mentionné dans le chapitre sur les séries entières.

1.4 Conditions nécessaires de convergence

La convergence implique que $S_N - S_{N-1}$ tend vers 0. Notion de divergence grossière.

Variante : si $S_{2N} - S_N$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

1.5 Série télescopique associée à une suite

Le télescopage $\sum_{n=n_0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_{n_0}$ prouve que la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ équivaut à la convergence de la série des différences $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Constante d'Euler. Équivalent de Stirling.

2 Séries à termes positifs

2.1 Somme d'une série à termes positifs

Leur intérêt est que la suite des sommes partielles est croissante, donc elle possède une limite. Il suffit (et il faut) que cette suite soit majorée pour que la série converge.

Notations $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

2.2 Critères de comparaison

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Critère des équivalents.

Attention, ces critères ne marchent pas forcément dans le cas des séries dont le terme général change de signe.

Exemples : les séries de la forme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ dans le cas $\alpha \neq 1$.

2.3 Règle de d'Alembert

On suppose que les u_n sont tous strictement positifs et que le quotient u_{n+1}/u_n possède une limite ℓ (éventuellement infinie).

Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\ell = 1$, alors la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

3 Convergence absolue

3.1 Définition

La *convergence absolue* d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ signifie que la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

On dit aussi dans ce cas que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est *sommable*.

3.2 Propriété fondamentale

La convergence absolue implique la convergence. Attention, la réciproque est fausse.

3.3 Adaptation des critères de comparaison

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Règle de d'Alembert.

3.4 Indices pairs et impairs

La convergence de $\sum u_{2p}$ et de $\sum u_{2p+1}$ implique celle de $\sum u_n$. La réciproque est fausse, mais devient vraie en cas de convergence absolue.

3.5 Suites de carré sommable

L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum (u_n)^2$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l'application $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

4 Séries alternées

4.1 Théorème des séries alternées (Leibniz)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle décroissante, de limite nulle. La série $\sum (-1)^n u_n$ est alors convergente.

De plus, pour tout entier $N \geq n_0$, le reste $\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^N u_N$ et sa valeur absolue est dominée ainsi

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_N.$$

4.2 Réécriture de la somme et des restes

On sépare les indices pairs et impairs dans les sommes partielles puis on passe à la limite.

4.3 Contre-exemples aux critères de comparaison

Où l'on mesure l'importance de l'hypothèse de positivité.

Programme de colles n° 2 (du lundi 26 septembre au vendredi 7 octobre 2022)

Tout sur le chapitre 3 (séries numériques). Le produit de Cauchy n'a pas encore été vu.

Questions de cours

- Énoncé de la règle de d'Alembert et démonstration de l'un des cas (y compris le cas $\ell = 1$) choisi par le colleur.
- Énoncé du théorème des séries alternées et mise en application sur un exemple direct choisi par le colleur.
- Étude d'une série du type $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ pour un choix explicite du couple (α, β) par le colleur (on ne donnera pas le cas $\alpha = 1$ en question de cours mais on pourra le donner en exercice avec des indications).