Séries numériques

Septembre 2022

PC* — lycée Henri POINCARÉ

Séries numériques

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.

La série de terme général u_n est la somme infinie *formelle*

$$\sum_{n \geqslant n_0} u_n .$$

On lui associe la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses *sommes partielles*, définie par

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \qquad U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k .$$

Séries numériques convergentes

Dire que la série numérique $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ *converge* signifie que la suite de ses sommes partielles est convergente.

En cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée *somme de la série*, et notée

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k .$$

Reste d'une série numérique convergente

Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est le nombre

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On peut alors écrire

$$S_n + R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

La suite $(R_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

Séries de référence

La série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ converge si $|x| < 1$ et diverge grossièrement dans le cas contraire.

En cas de convergence, sa somme est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Séries de référence

La série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout x dans $\mathbb{C}$.

Sa somme est donnée par la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Séries de référence

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Stabilité par combinaison linéaire

L'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum u_n$ converge est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Stabilité par combinaison linéaire

L'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum u_n$ converge est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Pas de stabilité par produit

L'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum u_n$ converge n'est **pas** stable par produit.

Par exemple, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente mais pas la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Pas de stabilité par produit

L'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum u_n$ converge n'est **pas** stable par produit.

Par exemple, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente mais pas la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Divergence grossière

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Bien sûr, la réciproque est fausse, comme en atteste la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Divergence grossière

Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

Bien sûr, la réciproque est fausse, comme en atteste la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Divergence grossière

Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

Bien sûr, la réciproque est fausse, comme en atteste la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Variante de la divergence grossière

Si la série $\sum u_n$ converge, alors toutes les suites extraites de la suite des sommes partielles convergent vers la même limite.

En particulier, des expressions comme $\sum_{n=N+1}^{2N} u_n$ doivent tendre vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Variante de la divergence grossière

Si la série $\sum u_n$ converge, alors toutes les suites extraites de la suite des sommes partielles convergent vers la même limite.

En particulier, des expressions comme $\sum_{n=N+1}^{2N} u_n$ doivent tendre vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Série des différences

Le télescopage $\sum_{n=n_0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_{n_0}$ prouve que la convergence de la série des différences $\sum_{n \geqslant n_0} (u_{n+1} - u_n)$ équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Utilisation de la série des différences

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

On prouve que la série $\sum_{n \geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge.

Utilisation de la série des différences

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

On prouve que la série $\sum_{n \geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge.

L'avantage des séries à termes positifs

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, alors ses suites partielles forment une suite croissante.

La suite des sommes partielles possède donc une limite.

L'avantage des séries à termes positifs

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, alors ses suites partielles forment une suite croissante.

La suite des sommes partielles possède donc une limite.

Critère de domination

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_1}$.

On suppose qu'il existe un rang $n_2 \geqslant \max(n_0, n_1)$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

On en déduit alors les deux implications que voici.

1. Si la série $\sum_{n \geqslant n_1} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ aussi.
2. Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_1} v_n$ aussi.

Critère de négligeabilité

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$.

On suppose que ces suites sont positives à partir d'un certain rang et qu'elle vérifient la relation

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n).$$

On en déduit alors les deux implications que voici.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_1} v_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ aussi.
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_1} v_n$ aussi.

Critère des équivalents

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$.

On suppose que ces suites sont positives à partir d'un certain rang et qu'elle vérifient la relation

$$u_n \sim v_n$$

quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit alors que les séries

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant n_1} v_n$$

sont de même nature.

Utilisation du critère de négligeabilité

Étudions la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ dans le cas $\alpha \neq 1$.

Règle de d'Alembert

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ dont les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

On suppose que le quotient u_{n+1}/u_n possède une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, alors il faut trouver une autre méthode pour conclure.

Convergence absolue

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe.

Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ *converge absolument* signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |u_n|$ est convergente.

Convergence absolue

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe.

Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ *converge absolument* signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |u_n|$ est convergente.

Propriété fondamentale

Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

La réciproque est fausse

Il peut arriver que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge mais que la série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ soit divergente.

C'est le cas par exemple avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

La réciproque est fausse

Il peut arriver que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge mais que la série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ soit divergente.

C'est le cas par exemple avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Adaptation du critère de domination

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite réelle à termes positifs.

On fait les hypothèses suivantes :

1. $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
2. La série $\sum_{n\geqslant n_1} v_n$ converge.

Alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge absolument.

Adaptation du critère de négligeabilité

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(v_n)_{n \geqslant n_1}$ une suite réelle à termes positifs.

On fait les hypothèses suivantes :

1. $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
2. La série $\sum\limits_{n \geqslant n_1} v_n$ converge.

Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge absolument.

Adaptation du critère des équivalents

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite réelle à termes positifs.

On fait les hypothèses suivantes :

1. $|u_n| \sim v_n$.
2. La série $\sum\limits_{n\geqslant n_1} v_n$ converge.

Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge absolument.

Adaptation de la règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite complexe dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang.

On suppose que le quotient $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ possède une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, alors il faut trouver une autre méthode.

Suites de carré sommable

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n)^2$ soit convergente.

1. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument.
2. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'application $(u, v) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Suites de carré sommable

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n)^2$ soit convergente.

1. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument.
2. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'application $(u, v) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Suites de carré sommable

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n)^2$ soit convergente.

1. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument.
2. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'application $(u, v) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Suites de carré sommable

On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n)^2$ soit convergente.

1. Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument.
2. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'application $(u, v) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, le reste $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n$ a le signe que $(-1)^N$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, le reste $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n$ a le signe que $(-1)^N$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, le reste $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n$ a le signe que $(-1)^N$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, on a la majoration $\left| \sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leqslant u_N$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, on a la majoration $\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leqslant u_N$.

Théorème des séries alternées

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

On peut alors affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}(-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier $N \geqslant n_0$, on a la majoration $\left|\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(-1)^n u_n\right| \leqslant u_N$.

Exemples fondamentaux

Pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.