PC* — mathématiques **jeudi 15 septembre 2022**
Devoir surveillé n° 1 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Question 2. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Question 3. Énoncer le théorème du rang.

Question 4. Donner la définition de la trace d'une matrice carrée et de la trace d'un endomorphisme.

Question 5. Donner la définition d'une fonction convexe.

Question 6. Soit E un espace préhilbertien réel. Soit a un vecteur non nul de E. On note p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, donner l'expression de $p(x)$.

Question 7. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ (avec démonstration).

Question 8. Donner la définition de la fonction arcsinus et tracer son graphe.

Question 9. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Rappeler les hypothèses sur n et p. Décrire en formules la loi de X. Donner l'espérance et la variance de X.

Question 10. Rappeler ce que sont les séries de Riemann et préciser lesquelles sont convergentes.

Calculs

Question 11. Décomposer la fonction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ en éléments simples.

Question 12. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Trouver une expression du terme général de cette suite.

Question 13. Déterminer la primitive nulle en 0 de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$.

Question 14. On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y\cos(xy^2)$. Exprimer son gradient.

Question 15. Démontrer par récurrence l'identité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Problème 1

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on considère la matrice

$$\mathrm{M}_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier, on note J_n la matrice $\mathrm{M}_n(1,1)$.

On note P_n le polynôme $\mathrm{X}(\mathrm{X}-n)$.

Question 16. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme A par P_n.

Question 17. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Trouver un polynôme S tel que $\mathrm{M}_n(a,b)^p = \mathrm{S}(\mathrm{J}_n)$ puis trouver une expression simplifiée de cette matrice.

Problème 2 — polynômes de Tchebyshev

On définit une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels en posant

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}.$$

Les T_n sont les *polynômes de Tchebyshev de première espèce.*

Partie I — étude des polynômes de Tchebyshev

Question 18. Calculer les polynômes $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$.

Question 19. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t réel, prouver l'égalité $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

Question 20. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, justifier que T_n est le seul élément de l'ensemble

$$\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \;;\forall t \in \mathbb{R},\; \mathrm{P}(\cos(t)) = \cos(nt)\}.$$

Question 21. Trouver le degré et le coefficient dominant de T_n.

Question 22. Étudier la parité de T_n.

Question 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right)$.

Montrer que les racines de T_n sont $x_1, \ldots, x_n$.

Partie II — étude d'un produit scalaire

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\varphi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(t))\,\mathrm{Q}(\cos(t))\;\mathrm{d}t$.

Question 24. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Question 25. Vérifier que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Question 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{F}_n(a) = \int_0^\pi \left(\cos^n(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos^k(t)\right)^2 \;\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction F_n possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$ et trouver sa valeur.

Problème 3

On considère un entier $n \geqslant 2$ et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^n = 0$.

On définit sur $]-1,1[$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et on introduit les coefficients de son développement limité à l'ordre $n-1$ en 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^{n-1}).$$

On considère ensuite le polynôme réel $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \mathrm{X}^k$.

Question 27. Rappeler l'expression littérale des a_k puis trouver une expression simplifiée de a_k avec des factorielles.

Question 28. Déterminer le développement limité à l'ordre $n-1$ en 0 de la fonction $\mathrm{R}_n : x \mapsto 1 + x - \mathrm{P}_n(x)^2$.

Question 29. Qu'en déduit-on quant aux dérivées successives de R_n en 0 ?

Question 30. Montrer qu'il existe un polynôme réel Q_n tel que $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})^2 = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^n \mathrm{Q}_n(\mathrm{X})$.

Question 31. Trouver une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{I}_n + \mathrm{A}$.

Question 32. *Application numérique.* On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 9 & -2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $(\mathrm{M} - 4\mathrm{I}_3)^3$ et en déduire une matrice L de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}$.

Problème 4

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est convexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Question 33. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, prouver la majoration $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{f(k) + f(k+1)}{2}$.

Question 34. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Rappeler quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $(k, f(k))$.

Question 35. En déduire les inégalités

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2} f(k) + \frac{1}{8} f'(k) \qquad \text{et} \qquad \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2} f(k+1) - \frac{1}{8} f'(k+1).$$

Question 36. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'encadrement

$$\mathrm{S}_n - \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(1) - f'(n)}{8} \leqslant \int_1^n f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{f(1) + f(n)}{2}.$$

Question 37. Vérifier que la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est convexe et appliquer l'encadrement précédent à cette fonction.

Question 38. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{T}_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k \right)^{1/n}.$$

Obtenir un équivalent aussi simple que possible de T_n quand n tend vers $+\infty$.
