

# Chapitre 4 — intégrales généralisées

## 1 Fonctions continues par morceaux

### 1.1 Définitions

Fonction continue par morceaux sur un segment. Cas des fonctions en escalier.

Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

### 1.2 Propriétés

L'ensemble  $C_m^0(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ .

Soit  $f \in C_m^0(I, \mathbb{R})$ . Soit  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $J$  contenant  $f(I)$ . Alors la fonction  $g \circ f$  est continue par morceaux sur  $I$ .

Soit  $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$ . Soit  $\varphi$  une fonction continue sur un intervalle  $J$ . On suppose que  $\varphi$  est strictement monotone et que l'intervalle  $\varphi(J)$  est inclus dans  $I$ . Alors la fonction  $f \circ \varphi$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $J$ .

### 1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition. Exemple : calcul de  $\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ .

Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Changement de variable. Pas d'intégration par parties.

La valeur de l'intégrale ne change pas si on modifie la valeur de la fonction en un nombre fini de points. En particulier, il existe des fonctions positives d'intégrale nulle différentes de la fonction nulle.

## 2 Intégrales généralisées

### 2.1 Présentation du problème

Il s'agit de donner un sens à l'étude de l'existence d'une intégrale comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \ln(t) dt, \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(t) dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}, \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

### 2.2 Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

Convergence d'une intégrale de la forme  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  dans le cas d'une fonction  $f$  continue par morceaux à valeurs complexes. Intégrale divergente.

Idem pour les intervalles des formes  $[a, b[, ] - \infty, b]$ . Intégrales faussement impropres.

Exemples de référence  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \int_0^1 \ln(t) dt, \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt, \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}, \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ .

### 2.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $]a, b[$  (bornes finies ou infinies). Soit  $c$  un élément de cet intervalle.

Dire que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  converge signifie que les deux intégrales  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_c^b f(t) dt$  convergent.

Dans ce cas, sa valeur est

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  est divergente pour toute valeur de  $\alpha$ .

## 2.4 Propriétés

Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Si  $f$  est positive, continue sur  $]a, b[$  (ou tout autre type d'intervalle), si l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  existe et vaut 0, alors la fonction  $f$  est identiquement nulle.

Changement de variable. Soit  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une bijection strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux. Les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s) ds$  sont alors de même nature; de plus, en cas de convergence, elles sont égales.

Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante.

Influence de la parité; de l'imparité.

Intégration par parties : ou bien on travaille uniquement avec des segments ou bien on y va directement, en vérifiant bien l'existence des limites du terme tout intégré. Calcul de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

## 2.5 Critères de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Critère d'équivalence.

## 3 Intégrabilité

### 3.1 Intégrale absolument convergente

Intégrale absolument convergente. Si l'intégrale  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge, alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  converge aussi et vérifie la majoration

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Les fonctions dont l'intégrale converge absolument sont appelées intégrables.

Les fonctions continues par morceaux sur un segment sont intégrables.

Les critères de comparaisons s'adaptent pour prouver l'intégrabilité d'une fonction.

### 3.2 Propriétés algébriques

Espace vectoriel  $L^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions intégrables sur  $I$ .

Complément : espace vectoriel  $L^2(I, \mathbb{R})$  des fonctions (à valeurs réelles) de carré intégrable sur  $I$ .

Si  $f^2$  et  $g^2$  sont intégrables, alors  $fg$  est intégrable. Produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

### 3.3 Point-méthode : comparaison série-intégrale

Soit  $f : [a, +\infty[$  une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

On montre que la série  $\sum_{n \geq a} f(n)$  a la même nature que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ .

Exemple : nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ .

## 4 Quelques problématiques classiques

### 4.1 Divergence grossière ?

Il est possible que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge sans que  $f$  ne tende vers 0 en  $+\infty$ .

Cependant, si cette intégrale converge et  $f$  possède une limite en  $+\infty$ , alors cette limite est nulle.

Un exemple avec absence de limite est fourni dans l'exercice 5.

## 4.2 Intégrales semi-convergentes

Il arrive que l'intégrale  $\int_I f(t) dt$  existe alors que l'intégrale  $\int_I |f(t)| dt$  diverge.

Exercices 5 et 10.

## 4.3 Relation de Chasles infinie ?

Peut-on écrire  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) dt$  sans se poser de questions ? La réponse est non en général.

La réponse est oui si on sait que l'intégrale converge mais il faut justifier l'égalité en passant par les sommes partielles.

## 4.4 Linéarité infinie ?

Peut-on appliquer la linéarité de l'intégrale dans le cas d'une somme infinie ?

La réponse est non en général. Deux théorèmes, dans des chapitres ultérieurs, permettront de la faire sous certaines hypothèses.

## 4.5 Passage à la limite dans les intégrales à bornes variables

Est-il vrai que  $\int_x^{2x} f(t) dt$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 ?

Lien avec la fin de l'exercice 9. On calcule également  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ .

## 4.6 Généralisation du théorème fondamental de l'intégration

Point-méthode : étant donné  $f$  continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  existe, on montre que les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Programme de colles n° 3 (du lundi 10 au vendredi 21 octobre 2022)

Tout sur le chapitre 4 (intégrales généralisées).

En guise de question de cours, on donnera à étudier la nature d'une intégrale extraite des exercices à une étoile de la première page de la fiche d'exercices.

Rien n'interdit de prolonger cette question de cours par un changement de variable, comme par exemple  $u = t^{1/3}$  dans la deuxième intégrale de l'exercice 1, ou  $u = t^{x-1}$  dans l'expression de  $\Gamma(x)$  (exercice 6).