

Exercice 1. (*) Étudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^\alpha}\right) dt, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{-\ln(t)}}{t^{2/3}} dt, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(t) dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\ln(t)} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{t^{2/3}} dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(x))^{\ln(\ln(x))}}, \quad \int_0^1 \frac{(e^{-2x} - e^{-x}) \sin(x)}{(1 - \cos(x))\sqrt{\tan(x)}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

Exercice 2. (*) Étudier la nature des intégrales suivantes selon la valeur de (α, β, λ)

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x^\beta} dx, \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha (e^{\beta x} - 1) dx, \quad \int_0^1 \frac{t^\beta}{1 - t^\alpha} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta} dx.$$

Exercice 3. (*) a. Pour tout $x > 0$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge. Sa valeur est notée $\Gamma(x)$.

b. Pour tout $x > 0$, montrer la relation $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

c. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout n dans \mathbb{N}^* .

d. On admet l'égalité $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ avec des factorielles.

e. Pour tout $\alpha > 0$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^\alpha} du$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de Γ .

Exercice 4. ()** **a.** Montrer l'existence de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$. Sa valeur est notée I .

b. Montrer l'existence de $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$ et montrer que cette intégrale vaut I .

c. Additionner ces deux intégrales, appliquer une identité trigonométrique puis calculer la valeur de I .

Exercice 5. ()** Pour tout α dans $]0, 1[$, prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$.

Pour tout β dans $]1, +\infty[$, en déduire l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(u^\beta) du$.

Exercice 6. ()** On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

a. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer sa dérivée.

b. En considérant $f(x) - f(1)$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 7. ()** Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x - [x]}{x^2} dx$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 8. (*) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} . On pose alors

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2/2}.$$

b. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .

c. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1} . Lien avec l'exercice 3 ?

Exercice 9. ()** **a.** Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$. On note I sa valeur.

b. Linéariser $\sin^3(t)$. En déduire l'identité suivante

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

c. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0. En déduire la valeur de I .

d. Refaire ce travail avec $\sin^5(t)$ au lieu de $\sin^3(t)$.

Exercice 10. ()** Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , prouver la minoration $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt \geq \frac{2}{\pi^\alpha(n+1)^\alpha}$.

b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ est divergente.

Exercice 11. ()** **a.** Montrer que les intégrales suivantes convergent et qu'elles ont la même valeur

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2 dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^2} dv, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

b. On définit une fonction f de $[0, \pi/2]$ dans \mathbb{R} en posant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right], \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

c. Pour tout $\alpha > 0$, on pose $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(\alpha x) dx$.

Montrer que $I(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

d. Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$ est constante.

e. Déterminer la valeur des intégrales introduites à la première question.

Exercice 12. (*)** On considère une fonction f de classe \mathcal{C}^2 de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} qui s'annule en 0. On suppose de plus que les fonctions f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la fonction $(f')^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et vérifie l'inégalité suivante

$$\left(\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} (f''(t))^2 dt \right).$$

Exercice 13. (*)** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.