Exercice 1. **Lemme de Riemann-Lebesgue (*)**

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction F admet une limite nulle en $+\infty$.

Question 1. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une constante C (indépendante de x) telle que

$$\forall x > 0, \quad |\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{x}.$$

Question 2. Conclure.

Problème I (**)

Le but de ce problème est de montrer que pour tout x dans $]0, 2\pi[$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}$ est convergente et de calculer sa somme.

Pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{E}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}.$$

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de E_n' sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, démontrer l'égalité

$$\mathrm{E}_n(x) = \mathrm{E}_n(\pi) + \int_\pi^x \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t - \mathrm{i} \int_\pi^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t.$$

Question 5. Soit $x \in]0, 2\pi[$. À l'aide de l'astuce de l'angle moitié, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\ \mathrm{d}t$.

Question 6. Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Problème II (**)

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^\alpha}$ quand elle existe.

Première partie — calcul de la somme d'une série

Dans cette première partie, on fixe un élément a de l'intervalle $]0, 1[$.

Question 7. Pour tout x dans l'intervalle $]0, \pi]$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \mathrm{C}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx), \qquad \mathrm{B}_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Montrer l'identité $\mathrm{S}_n(x) = 2\mathrm{B}_n(x)$. En déduire une relation entre $\mathrm{C}_n(x)$ et $\mathrm{B}_n(x)$.

Question 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{B}_n(x)\ \mathrm{d}x$ existe et qu'elle vaut $\pi/2$.

Question 9. On définit une fonction φ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(x) = \frac{\cos(ax) - 1}{\sin(x/2)} \quad \text{si } x \in]0, \pi].$$

Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$ et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right) \mathrm{d}x$.

À l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, montrer que la suite de terme général I_n converge vers 0.

Question 11. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(ax)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = -\dfrac{\sin(\pi a)}{2a} + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_n + \dfrac{\pi}{2}$.

b. Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ et préciser la valeur de sa somme.

Question 12. Prouver l'égalité suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

Deuxième partie — calcul d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe un élément α de l'intervalle $]1, +\infty[$.

Question 13. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}$.

On introduit les notations suivantes

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}, \qquad \mathrm{G}(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}, \qquad \mathrm{H}(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha}.$$

Question 14. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, exprimer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \displaystyle\int_0^1 t^{k\alpha}\, \mathrm{d}t$ de deux manières.

Question 15. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 16. En déduire l'égalité suivante

$$\mathrm{G}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}.$$

Question 17. À l'aide d'un changement de variable de la forme $t \mapsto t^\beta$ pour une constante β strictement négative bien choisie, montrer l'égalité

$$\mathrm{H}(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}\mathrm{G}\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right).$$

Question 18. Obtenir finalement l'égalité $\mathrm{F}(\alpha) = \dfrac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$.
