Exercice 1. (*) Soit (F, N) un espace vectoriel normé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose que u est injective.

Montrer que la fonction $\mathrm{N}_u : x \mapsto \mathrm{N}(u(x))$ est une norme sur E.

Exercice 2. (*) Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M}(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

a. Montrer que M est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Dessiner la boule unité fermée de M.

c. Trouver des constantes λ et μ strictement positives telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{M}(x) \leqslant \lambda \mathrm{N}_2(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(x) \leqslant \mu \mathrm{M}(x),$$

les constantes λ et μ étant aussi petites que possible.

Exercice 3. (*) Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, on note

$$||\mathrm{P}|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} |\mathrm{P}(x)| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

a. Prouver que $||\ ||$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b. Montrer que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||$ et vers 1 pour la norme N.

c. Construire une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

d. (***) Pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, construire une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme P.

Exercice 4. (**) Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on pose

$$||\mathrm{A}|| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{\ell=1}^{p} |a_{k,\ell}|\,.$$

a. Vérifier que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Reconnaître cette norme dans le cas $p = 1$.

b. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et toute matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, prouver l'inégalité $||\mathrm{AB}|| \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}||$.

c. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Trouver un vecteur $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$||\mathrm{X}||_\infty = 1 \quad \text{et} \quad ||\mathrm{AX}||_\infty = ||\mathrm{A}||.$$

Exercice 5. (*) Soit $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$. Montrer l'égalité

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{B}\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{B}_f(x_0, 1).$$

Exercice 6. (*) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

On suppose que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice A et que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice B.

Montrer alors que la suite $(\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Exercice 7. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est la matrice nulle.

Exercice 8. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est une matrice de projection.

Exercice 9. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que f préserve le produit scalaire, ce qui signifie que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

On pose $g = f - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Im}(g) = (\mathrm{Ker}(g))^{\perp}$.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$p_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Pour tout vecteur x de E, montrer que la suite $(p_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 10. (*) Montrer que l'adhérence de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 11. (**) Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, ||\ ||)$.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par U est égal à E.

Exercice 12. (**) On définit de E dans E la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\max(1, ||x||)}.$$

Montrer que la fonction f est 2-lipschitzienne.

Exercice 13. (**) Soit $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||u_{n+1} - u_n||$ converge.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée u^*.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver la majoration $||u_n - u^*|| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} ||u_{k+1} - u_k||$.

Exercice 14. (**) Soit $(\mathrm{E}, ||\ ||)$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit F une partie fermée de E.

Soit $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que ϕ soit k-lipschitzienne.

On choisit $x_0 \in \mathrm{F}$.

a. Montrer que la relation de récurrence $x_{n+1} = \phi(x_n)$ permet de définir une suite d'éléments de F.

b. Montrer qu'une telle suite est convergente dans F.

c. Montrer que sa limite ne dépend pas de x_0.

d. Montrer que ϕ possède un unique point fixe dans F.
