PC* — mathématiques **jeudi 6 octobre 2022**
Devoir surveillé n° 2 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer la règle de d'Alembert.

Question 2. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 3. Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de la fonction arctangente.

Question 4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Question 5. Donner la définition d'une fonction convexe.

Calculs

Question 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} z^{4n-5}$ et exprimer sa somme en cas de convergence.

Question 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^3}{n!} z^n$ converge absolument et calculer sa somme.

Question 8. Soient n et p deux entiers strictement positifs. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Démontrer la relation $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$.

Question 9. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}$ converge et calculer sa valeur.

Question 10. En raisonnant par récurrence, prouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) > \sqrt{2n+1}$.

Problème 1

On fixe un élément n de $\mathbb{N}^*$. Pour tout couple $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$, on pose $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$.

On note $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ associée à $(0, \ldots, n)$.

Question 11. Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Question 12. Rappeler l'expression des polynômes $\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n$.

Question 13. Vérifier que $\mathcal{L}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ pour le produit scalaire $(\ |\ )$.

Question 14. On note H l'ensemble $\left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \ ;\ \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(k) = 0\right\}$.

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et trouver un vecteur directeur de son orthogonal.

Question 15. Pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, déterminer le projeté orthogonal de Q sur H.

Problème 2

Soient a et b deux éléments de $]0,+\infty[$. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

Le but de cet exercice est de trouver un équivalent de u_n et de calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en cas d'existence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = n^{b-a}\ u_n$.

Question 16. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n))$ converge absolument.

Question 17. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que u_n soit équivalent à K/n^{b-a} quand n tend vers $+\infty$.

Question 18. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ soit convergente.

Jusqu'à la fin de ce problème, on suppose que cette condition est satisfaite.

Question 19. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n)$ converge et préciser sa somme.

Question 20. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$ converge et préciser sa somme.

Question 21. Effectuer la différence de ces deux sommes et en déduire une expression de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de (a, b, u_0).

Problème 3

On définit sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}, \quad a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}, \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n).$$

Question 22. Étudier les variations de la fonction f.

Question 23. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ converge.

Question 24. À l'aide de la série télescopique associée, prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ.

Question 25. Pour tout entier $n \geqslant 2$, vérifier l'égalité $a_n - a_{n-1} = \dfrac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right)^2$.

Question 26. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

Question 27. À l'aide des résultats des deux précédentes questions, montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Question 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'égalité $\mathrm{S}_{2n} + t_{2n} = \ln(2) \times \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + t_n$.

Question 29. En déduire une expression de S_{2n} en fonction de a_n, de a_{2n} et de u_n.

Question 30. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$.
