PC* — mathématiques **jeudi 6 octobre 2022**
Devoir surveillé n° 2 — piste rouge **durée : 4 heures**

Séries semi-convergentes

Calculatrices autorisées

Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant : toute partie X *non vide* de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, que l'on note $\min(\mathrm{X})$.

On rappelle les points suivants du langage Python :
- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a, b) sera représenté par la liste $[a, b]$.
- Pour ajouter l'élément x en queue de la liste *tab*, on invoque `tab.append(x)`

On dira qu'une série à terme réels est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour tout suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

Partie I — Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = (-1)^n/n$. On se propose de définir une bijection s de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ telle que

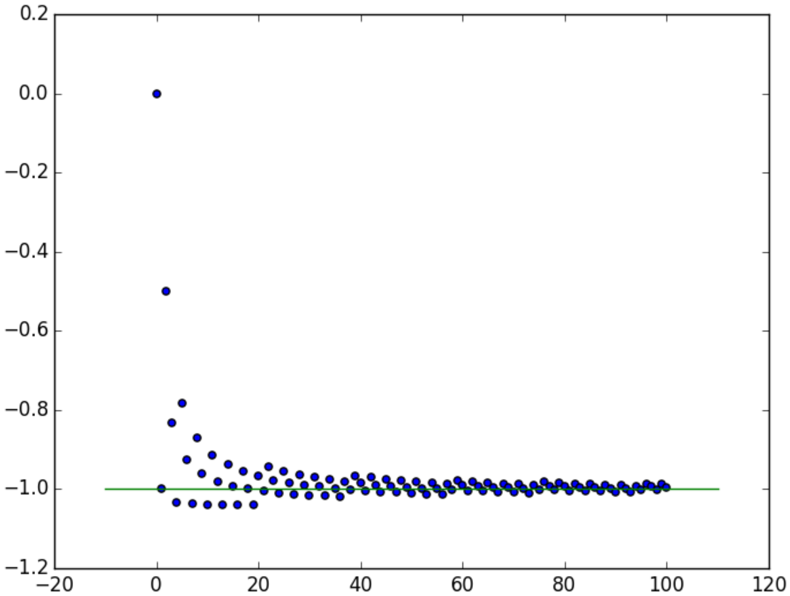
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x.$$

I.A. On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geqslant 0}$, $(q_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 0}$ de réels de la manière suivante :
- $p_0 = q_0 = 0$, $\mathrm{S}_0 = 0$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, si $\mathrm{S}_n > x$, alors $q_{n+1} = 1+q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1}-1$ sinon $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$;
- $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + u_{s_{n+1}}$ dans les deux cas.

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie (si possible en temps linéaire) la liste $[s_1, s_2, \ldots, s_n]$.

I.A.2. En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle affiche le dessin simultané de la liste des points de coordonnées (n, S_n) pour n variant de 1 à 100 et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient (pour le choix $x = -1$) le dessin suivant



Que constate-t-on pour la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B. À partir de maintenant, l'entier s_n est noté $s(n)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver les propriétés suivantes :

(i) $\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} = \{2, 4, \ldots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \ldots, 2q_n - 1\}$;

(ii) $p_n + q_n = n$;

(iii) $\mathrm{S}_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$.

En déduire que la fonction s est injective.

I.C. Dans cette question, on prouve que la fonction s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

I.C.1. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2. On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

a. On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser I.C.1 pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$\mathrm{S}_n > x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b. Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3. Justifier rapidement que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

I.C.4. Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

I.D. Dans cette question, on prouve que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

I.D.1. Pour tout entier naturel n, prouver que l'on a

$$|\mathrm{S}_{n+1} - x| \leqslant |\mathrm{S}_n - x| \qquad \text{ou} \qquad |\mathrm{S}_{n+1} - x| \leqslant \left|u_{s(n+1)}\right|.$$

I.D.2. En déduire que pour tout entier naturel N, il existe un entier $n > \mathrm{N}$ tel que

$$|\mathrm{S}_{n+1} - x| \leqslant \left|u_{s(n+1)}\right|.$$

I.D.3. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad p_n \geqslant 1, \quad q_n \geqslant 1.$$

I.D.4. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on note $v_n = \max(|\mathrm{S}_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5. Démontrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et conclure.

I.E. Dans cette question, on précise l'ordre de grandeur de p_n et de q_n.

I.E.1. Démontrer l'existence d'une constante réelle γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

I.E.2. Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I.E.3. On reprend les notations p_n et q_n de la question I.A.

a. Pour tout entier n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, prouver l'égalité

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b. En déduire la relation

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln(2) + \mathrm{o}(1).$$

c. En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d. Déterminer la limite du quotient

$$\frac{\left|u_{s(1)}\right| + \cdots + \left|u_{s(n)}\right|}{|u_1| + \cdots + |u_n|}$$

quand n tend vers $+\infty$.

Partie II — Suites vérifiant les propriétés (P$_1$) et (P$_2$)

II.A. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Prouver que cette suite vérifie (P$_1$).

II.B. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge.

II.B.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie.

II.B.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

Pour tout N dans $\mathbb{N}$, prouver la relation

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n u_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (a_n - a_{n+1})\mathrm{U}_n + a_{\mathrm{N}}\mathrm{U}_{\mathrm{N}}.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (P$_2$).

II.C. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge.

Caractériser les suites complexes qui vérifient (P$_1$).

II.D. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge. Pour cela, on définit par récurrence $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $\mathrm{A}_0 = a_0$;
- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} & \text{et} \quad \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad \text{si } \mathrm{A}_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} & \text{et} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \quad \text{sinon ;} \end{cases}$
- $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_{n-1} + a_n\varepsilon_n$ dans tous les cas.

II.D.1. Dans cette question seulement, on choisit $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a. Déterminer les six premiers termes des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Écrire en Python une fonction `exemple` qui prend en argument l'entier n et retourne la liste

$$[[0, p_0, \varepsilon_0, \mathrm{A}_0], \ldots, [n, p_n, \varepsilon_n, \mathrm{A}_n]].$$

II.D.2. On revient au cas général.

a. Démontrer que pour tout entier naturel N, il existe un entier $n > \mathrm{N}$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par $n_0 = 0$ et pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$n_{k+1} = \min\left\{n \in \mathbb{N} \ ; \ n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\right\}.$$

b. Calculer p_{n_k} et ε_{n_k}. Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est divergente.

c. Déterminer n_1, n_2, n_3 pour l'exemple de la question II.D.1.

II.D.3. Dans cette question seulement, on choisit $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

a. Écrire en Python une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne la liste

$$[[0, n_0], \dots, [q, n_q]],$$

où q est le plus grand des entiers k tels que $n_k \leqslant n$. Par exemple, l'appel de `indexer(10000)` renvoie la liste

$$[[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 51]].$$

b. On considère un entier $k \geqslant 3$ tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'encadrement

$$k - 1 \leqslant \mathrm{A}_{n_k - 1} \leqslant k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}.$$

En déduire l'inégalité $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c. Calculer explicitement la différence $\mathrm{A}_{n_{k+1}-1} - \mathrm{A}_{n_k - 1}$ en fonction de (k, n_k, n_{k+1}).
Pour tout entier $k \geqslant 3$, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1} + 1}{n_k + 1}\right) \leqslant \mathrm{A}_{n_{k+1}-1} - \mathrm{A}_{n_k - 1} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d. Pour tout entier $k \geqslant 3$, déduire des deux questions précédentes l'encadrement

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leqslant \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e. En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $\ln(n_k) - 2^k$ puis prouver l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$n_k \sim_{k \to +\infty} \mathrm{C} \times \exp(2^k).$$

En déduire l'équivalent

$$\mathrm{A}_{n_k} \sim_{k \to +\infty} \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

puis

$$\mathrm{A}_n \sim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle de limite nulle, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est convergente.

a. Pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle de limite nulle, prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

b. En déduire que la série $\sum a_n$ converge absolument.

II.F. Soit maintenant une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour toute suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ implique la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II.F.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

II.F.3. Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4. Caractériser les suites vérifiant (P_2).