Exercice 1. **Inégalités de Hölder et de Minkowski**

On fixe p dans $]1,+\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

et on définit $||x||_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $|| \ ||_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1,+\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer *l'inégalité de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant ||x||_p ||y||_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y.

Question 5. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant ||x||_p \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}.$$

b. Majorer de même la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

c. En déduire *l'inégalité de Minkowski* $||x + y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.

d. Qu'a-t-on démontré ?

Question 6. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $||x||_p$ tend vers $||x||_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite u de ℓ^p, on pose

$$\mathrm{N}_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

Question 7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p.

Question 9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \mathrm{N}_p(u)\mathrm{N}_q(v).$$

Exercice 2. $\boxed{\textbf{Exponentielles de matrices}}$ On fixe un entier $p \geqslant 2$. On note E l'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de E, on impose la notation suivante pour les coefficients de A

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}(r,s))_{1 \leqslant r,s \leqslant p}.$$

En particulier, pour tout entier naturel k, les coefficients de la matrice A^k sont notés $(\mathrm{A}^k)(r,s)$ (oui, les parenthèses sont obligatoires, afin de bien distinguer ce nombre de $(\mathrm{A}(r,s))^k$).

Étant donné une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, dire que la série matricielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ *converge* signifie, comme dans le cas des séries numériques, que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles, définies par

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k,$$

est convergente. En cas de convergence, la limite de cette suite s'appelle *la somme de la série matricielle* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ et elle est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$. Les résultats du cours sur les espaces vectoriels normés de dimension finie permettent de justifier que la convergence de la série matricielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ équivaut à ce que pour tout couple (r,s) d'indices entre 1 et p, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\mathrm{A}_n)(r,s)$ converge. De plus, en cas de convergence, les coefficients de la matrice somme sont les nombres

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right)(r,s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n(r,s).$$

Le but de cet exercice est de prouver que pour toute matrice A de E, la série matricielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\mathrm{A}^n}{n!}$ est convergente. Sa somme est logiquement appelée *exponentielle* de la matrice A.

Pour toute matrice $\mathrm{A} = (\mathrm{A}(r,s))_{1 \leqslant r,s \leqslant p}$ de E, on pose

$$||\mathrm{A}|| = \max_{1\leqslant r \leqslant p} \sum_{s=1}^{p} |\mathrm{A}(r,s)|\,.$$

Comme on l'a vu en travaux dirigés (exercice 2 du chapitre 4), la fonction $||\ ||$ ainsi définie est une norme sur E. On pourra utiliser, sans la redémontrer, la majoration $||\mathrm{A} \times \mathrm{B}|| \leqslant ||\mathrm{A}|| \times ||\mathrm{B}||$, prouvée en travaux dirigés.

Question 10. Pour tout matrice A de E et tout couple (r,s) d'indices entre 1 et p, prouver la majoration

$$|\mathrm{A}(r,s)| \leqslant ||\mathrm{A}||.$$

Question 11. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de E. On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||\mathrm{A}_n||$ est convergente.

Pour tout couple (r,s) d'indices entre 1 et p, prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\mathrm{A}_n)(r,s)$ converge absolument.

En déduire que la série matricielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ est convergente. On a prouvé ici qu'il existe une sorte de convergence absolue pour les séries de matrices.

Question 12. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $||\mathrm{A}^n|| \leqslant ||\mathrm{A}||^n$.

b. En déduire que la série matricielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\mathrm{A}^n}{n!}$ est convergente.

Sa somme est notée $\exp(\mathrm{A})$.

Question 13. Calculer $\exp(\mathrm{A})$ dans le cas où A est une matrice diagonale.