

# Chapitre 6 — suites de fonctions

Les espaces de fonctions ne sont pas de dimension finie. Il n'y a donc pas de manière canonique de définir la convergence d'une suite de fonctions. Ce chapitre présente deux modes de convergence.

## 1 Convergence simple

Suites de fonctions. Convergence simple. Exemples de comportements non satisfaisants.

## 2 Convergence uniforme

### 2.1 Définition

Définition. Exemples et contre-exemples.

Remarque : la convergence uniforme implique la convergence simple.

### 2.2 Théorème de continuité

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $I$ ;
- la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $I$ .

Conclusion : la fonction  $f$  est continue sur  $I$ .

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

### 2.3 Passage à la limite sous l'intégrale

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $f$  une fonction définie sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur le segment  $[a, b]$ ;
- la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur le segment  $[a, b]$ .

Conclusion : la suite de terme général  $\int_a^b f_n(t) dt$  converge vers le nombre  $\int_a^b f(t) dt$ .

### 2.4 Théorème de dérivation

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Hypothèses :

- Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction  $g$  sur  $I$ .
- Pour tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ , la suite de fonctions  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $h$  sur  $[a, b]$ .

Conclusions : la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et sa dérivée est la fonction  $h$ .

Variante pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : l'hypothèse de convergence uniforme porte uniquement sur l'ordre de dérivation le plus élevé.