Chapitre 7 — convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers $\int_{\mathrm{I}} f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

Exemples : la suite des intégrales de Wallis converge vers 0.

Exercice 1. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ (cette intégrale est notée I dans la suite).

b. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, trouver une relation entre I_n et l'intégrale de Wallis W_{2n+1}.

c. On donne l'équivalent $\mathrm{W}_p \sim \sqrt{\pi/(2p)}$. En déduire la valeur de I.

d. Prouver l'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, admise dans un exercice du chapitre 3.

Exercice 2. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \,\mathrm{d}t$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{W}_n$.

Exercice 3. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Montrer l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 4. (***) Pour tout x réel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on calculera $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) \mathrm{d}t$ et on appliquera le théorème de convergence dominée.

Programme de colles n° 5 (du lundi 21 novembre au vendredi 2 décembre 2022)

Chapitres 6 et 7.
