Exercice 1. (*) Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a_k)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 2. (*) Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_1 : x \mapsto x \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_3 : x \mapsto x\ln(x) \qquad f_4 : x \mapsto x^2\ln(x)$$

forment une famille libre.

Exercice 3. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Démontrer l'égalité $f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4. (*) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Démontrer l'égalité $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$.

Exercice 5. (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer les équivalences suivantes

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2);$$
$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

On note g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. Que signifient ses égalités pour g ?

Exercice 6. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E et F sont de dimension finie. Démontrer l'encadrement suivant

$$|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 7. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E et on fait les hypothèses suivantes

$$f + g = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E. Montrer de plus que f et g sont les projecteurs associés.

Exercice 8. (***) Soient V et W deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose

$$\mathrm{L}_1 = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \ ; \ f_{|\mathrm{W}} = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_2 = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \ ; \ f_{|\mathrm{V}} = 0\}.$$

Montrer que L_1 et L_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Exercice 9. (**) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, dont on exprimera le noyau et l'image en fonction de ceux de p et de q.

Exercice 10. (*) a. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
Démontrer l'égalité

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f).$$

Pour cela, on considérera la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

b. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Montrer que la suite de terme général $\rho_k = \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

Montrer de plus que les termes de cette suite sont nuls à partir d'un certain rang p.

c. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E.

d. Vérifier que F et G sont stables par f.

e. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de F et de G induits par f. Montrer que $(f_1)^p$ est nul et que f_2 est bijectif.

Exercice 11. (*) On pose $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{M}^2 = \mathrm{N}$

a. Justifier que M laisse stables Ker(N) et Im(N).

b. Déterminer le noyau et l'image de N. Qu'en déduit-on quant aux coefficients de M ?

c. Conclure.

Exercice 12. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donc la dimension est notée n. Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que f est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que f^k soit l'endomorphisme nul de E. *L'indice de nilpotence* de f est l'entier

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ f^k = 0\}.$$

a. On prend x_0 dans $\mathrm{E} \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F}_{x_0} = (f^{p-1}(x_0), \ldots, f(x_0), x_0)$$

est libre.

b. En déduire une inégalité entre p et n.

c. Dans cette question, on suppose que p est égal à n. En choisissant x_0 comme à la question **a**, la famille $\mathcal{F}_{x_0}$ est alors une base de E.

Écrire la matrice représentative de f relativement à cette base.

Exercice 13. (**) Une matrice *triangulaire supérieure stricte* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

a. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^n est la matrice nulle.

b. (***) Réciproquement, montrer que toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (raisonner par récurrence sur n).

c. Retrouver le résultat de la question **b** de l'exercice précédent.

Exercice 14. (***) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $v \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Montrer que l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$ a lieu si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vérifiant $u = v \circ h$.

Exercice 15. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})\ ;\ u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, et calculer sa dimension.

Pour cela, on établira un isomorphisme entre $\mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en représentant les endomorphismes de E dans deux bases bien choisies.

Exercice 16. (*) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 17. (*) Montrer que la matrice $\mathrm{A} = (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est de rang 2.

Exercice 18. On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. (*) Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k} \mathrm{E}_{i,\ell}.$$

b. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ACB})$ a lieu pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire un multiple de la matrice I_n).

Exercice 19. (**) On considère deux matrices A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre l'équation $\mathrm{X} + \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20. (**) On fixe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit l'endomorphisme $\Phi_\mathrm{A} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{XA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer la trace de Φ_A.

Exercice 21. (**) On considère une matrice $\mathrm{M} = (m_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.

Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul. Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Exercice 22. (*) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{M}(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres coefficients valent b.

a. On pose $\mathrm{J} = \frac{1}{n}\mathrm{M}(1,1)$. Trouver un polynôme annulateur de J.

b. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ comme polynôme en J. En déduire le calcul des puissances de $\mathrm{M}(a,b)^p$.

c. Montrer que l'ensemble $\mathscr{M} = \{\mathrm{M}(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ est stable par produit.

Exercice 23. (***) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui soit à la fois un supplémentaire de F et de G dans E.

Exercice 24. (**) Soient $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer les inégalités

$$\mathrm{rg}(v\circ u)\leqslant \min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(v\circ u)\geqslant \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)-\dim(\mathrm{F}).$$

Exercice 25. (**) Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ équivaut à l'existence de vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $\mathrm{A} = \mathrm{X}\cdot {}^t\mathrm{Y}$.

b. On note r le rang de A. Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r,\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_r$ tels que

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{X}_k\cdot {}^t\mathrm{Y}_k.$$

Montrer alors que les familles $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r)$ et $(\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_r)$ sont libres.

Exercice 26. (*) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a\\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2\\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3\end{vmatrix}$.

Exercice 27. (*) Calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \max(i,j)$.

Exercice 28. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout z dans $\mathbb{C}^*$, calculer le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_n(z)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent $z+\dfrac{1}{z}$, les coefficients qui bordent la diagonale valent 1, et les autres sont nuls.

Exercice 29. (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On se donne une base $\mathcal{E}$ de E.

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Pour toute famille $\mathcal{U} = (u_1,\dots,u_n)$ de n vecteurs de E, on pose

$$\varphi(\mathcal{U}) = \det_{\mathcal{E}}(f(u_1),u_2,\dots,u_n) + \det_{\mathcal{E}}(u_1,f(u_2),u_3,\dots,u_n)+\cdots+\det_{\mathcal{E}}(u_1,\dots,u_{n-1},f(u_n)).$$

a. Montrer que φ est une forme n-linéaire alternée sur E.

b. Calculer $\varphi(\mathbb{E})$.

c. Que peut-on en déduire ?

Exercice 30. (*) Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$.

Exercice 31. (*) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité $\operatorname{dét} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{dét}(\mathrm{I}_n - \mathrm{B}^2)$.

Exercice 32. (**) Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'égalité $\operatorname{dét}(\mathrm{C} + \mathrm{M}) = \operatorname{dét}(\mathrm{M})$ a lieu pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que C est nulle.

Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que C n'est pas nulle : on extrait une colonne non nulle de C et on la complète en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis on construit une matrice M non inversible telle que $\mathrm{C} + \mathrm{M}$ soit inversible.

Exercice 33. (*) Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\mathrm{T} : \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{M}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 34. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 35. On fixe un entier $n \geqslant 2$.

1. (*) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la fonction

$$f_{\mathrm{A},\mathrm{B}} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \operatorname{dét}(\mathrm{A} + t\mathrm{B}) \end{array}$$

est une fonction polynomiale.

Montrer de plus que le degré de $f_{\mathrm{A},\mathrm{B}}$ est majoré par le rang de B et que le degré de $f_{\mathrm{A},\mathrm{B}}$ vaut n si B est inversible.

2. (**) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}$.

b. On prend α et β distincts dans $\mathbb{K}$ et on prend $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & \gamma_n \end{pmatrix}$. Exprimer la fonction $f_{\mathrm{A},\mathrm{J}}$ et en déduire une expression du déterminant de A.

3. (***) On considère quatre matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$. On suppose que A et C commutent.

a. On suppose dans cette question que A est inversible. Montrer l'égalité $\operatorname{dét}(\mathrm{M}) = \operatorname{dét}(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$.

b. Montrer cette égalité dans le cas où A n'est pas nécessairement inversible. On pourra pour cela introduire la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à λ associe le déterminant de la matrice $\mathrm{M}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$.

c. Quelle formule obtient-on si A est inversible mais ne commute pas avec C ?

Exercice 36. (**) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \exp(\mathrm{i}2\pi/n)$.

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

a. Calculer un argument du déterminant de A.

b. Calculer $\overline{\mathrm{A}} \times \mathrm{A}$. En déduire la valeur du déterminant de A.
