Chapitre 8 — algèbre linéaire

1 Calcul matriciel

1.1 Produit matriciel

Rappels sur le produit d'une matrice par une colonne et sur le produit de deux matrices.
Traduction des opérations élémentaires par des produits matriciels.

1.2 Représentation matricielle des vecteurs

Codage d'un vecteur dans une base. Codage d'une famille de vecteurs dans une base.
Matrices de passage.
Formule de changement de base $\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(x) = \mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}) \times \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(x)$.

1.3 Représentation des applications linéaires

Matrice d'une application linéaire (définition par les colonnes). Variante avec les lignes.
Image d'un vecteur par une application linéaire.
Lien entre composition d'applications linéaires et produit matriciel.
Formule de changement de bases $\mathrm{M}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a) = (\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}'))^{-1} \times \mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$.
Cas des endomorphismes. Matrices semblables.

1.4 Noyau et image d'une matrice

L'application linéaire canoniquement associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'application $f_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{A} \times \mathrm{X}$, définie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Théorème du rang.

Le noyau et l'image de la matrice A sont ceux de f_{A}. En particulier, l'image de A est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Trouver le noyau de A revient à trouver les combinaisons linéaires nulles de ses colonnes.

Traduction matricielle de la forme géométrique du théorème du rang.

Exemple sur la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Produits d'espaces vectoriels

2.1 Définition

2.2 Cas de la dimension finie

Base de $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$. Dimension.

2.3 Complément : produits d'espaces vectoriels normés

Si $(\mathrm{E}_1, \mathrm{N}_1), \ldots, (\mathrm{E}_p, \mathrm{N}_p)$ sont des espaces vectoriels normés, alors la fonction

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \mathrm{N}_1(x_1) + \cdots + \mathrm{N}_p(x_p)$$

est une norme sur $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_p$.

3 Sommes de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition (espace engendré par la réunion). Caractérisation (ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + x_2$ avec x_i dans E_i).

L'application linéaire $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, définie de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ vers E, a pour image $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$.
Famille génératrice. Formule $\dim(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) \leqslant \dim(\mathrm{E}_1) + \dim(\mathrm{E}_2)$.
La formule du rang pour f donne la formule de Grassmann.

3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition. Caractérisation (intersection triviale). Lien avec les familles libres.
Cas de la dimension finie : si E_1 et E_2 sont en somme directe, alors $\dim(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2)=\dim(\mathrm{E}_1)+\dim(\mathrm{E}_2)$.
Réciproque : si $\dim(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2)=\dim(\mathrm{E}_1)+\dim(\mathrm{E}_2)$, alors E_1 et E_2 sont en somme directe.
Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs associés.

3.3 Généralisation de la notion de somme

Somme $\mathrm{E}_1+\cdots+\mathrm{E}_p$, définie comme le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion $\mathrm{E}_1\cup\ldots\cup\mathrm{E}_p$. C'est l'image de l'application linéaire

$$f:(x_1,\ldots,x_p)\mapsto x_1+\cdots+x_p,$$

définie de $\mathrm{E}_1\times\cdots\times\mathrm{E}_p$ vers E.
On obtient une famille génératrice de la somme en concaténant des familles génératrices des E_i.
Inégalité $\dim(\mathrm{E}_1+\cdots+\mathrm{E}_p)\leqslant\dim(\mathrm{E}_1)+\cdots+\dim(\mathrm{E}_p)$.

3.4 Généralisation de la notion de somme directe

Somme directe $\mathrm{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{E}_p$ (ça équivaut à ce que l'application f définie plus haut soit injective). Caractérisation : la somme est directe si, et seulement si, la seule décomposition du vecteur nul dans la somme $\mathrm{E}_1+\cdots+\mathrm{E}_p$ est la décomposition triviale.
Lien avec les familles libres.
Caractérisation par les dimensions.
Caractérisation : la somme $\mathrm{E}_1+\cdots+\mathrm{E}_p$ est directe si, et seulement si, la somme $\mathrm{E}_1+\cdots+\cdots\mathrm{E}_{p-1}$ est directe et a une intersection triviale avec E_p.
Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont tous distincts, alors la somme $\mathrm{Ker}(u-\lambda_1\mathrm{Id}_\mathrm{E})+\cdots+\mathrm{Ker}(u-\lambda_p\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est directe.

3.5 Sous-espaces supplémentaires

Définition. Caractérisation avec l'application f définie plus haut. Caractérisation par les bases. Caractérisation par les dimensions.
Famille de projecteurs associés.

Complément : formule $\mathrm{Ker}((u-\lambda_1\mathrm{Id}_\mathrm{E})\circ\cdots\circ(u-\lambda_p\mathrm{Id}_\mathrm{E}))=\mathrm{Ker}(u-\lambda_1\mathrm{Id}_\mathrm{E})+\cdots+\mathrm{Ker}(u-\lambda_p\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

4 Matrices par blocs

4.1 Définition et propriétés

Écriture d'une matrice par blocs. Produit de deux matrices par blocs.
Cas des matrices diagonales par blocs ; des matrices triangulaires par blocs.

4.2 Méthode du pivot par blocs

Détermination du rang des matrices $\begin{pmatrix}\mathrm{M} & \mathrm{M}\\ \mathrm{M} & \mathrm{M}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$ (dans le cas où A est inversible).

4.3 Sous-espaces stables

Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
Caractérisation matricielle : interprétation des matrices triangulaires par blocs ; diagonales par blocs.
Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors chacun laisse stables le noyau et l'image de l'autre.
Cas particulier : u commute avec tout polynôme en u.
Idem pour des matrices.

5 Déterminant

5.1 Rappels

Formes multilinéaires alternées.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

Pour toute base $\mathcal{E}$ de E, on note $\underset{\mathcal{E}}{\text{dét}}$ l'unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(\mathcal{E}) = 1$.

Formule de changement de base.

Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice. Continuité.

Règles opératoires (effet des opérations du pivot, développement selon une ligne ou une colonne, déterminant d'un produit, déterminant de l'inverse, de la transposée). Matrices tridiagonales.

5.2 Déterminant de Vandermonde

Le déterminant de la matrice $((a_i)^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ vaut $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_k - a_i)$.

5.3 Déterminant d'une matrice par blocs

Déterminant des matrices triangulaires par blocs. Exercice : calcul de dét $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ sous certaines hypothèses.

5.4 Déterminant et polynômes

Développement de $\text{dét}(\mathrm{A} + t\mathrm{B})$ (exercice 34). Cas particulier de $\text{dét}(t\mathrm{I}_n - \mathrm{M})$.

Programme de colles n° 6 (du lundi 5 au vendredi 16 décembre 2022)

Toute l'algèbre linéaire de première année et le contenu du chapitre 8.
