PC* — **mathématiques** **jeudi 24 novembre 2022**
Devoir surveillé n° 3 — **piste bleue** **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et calculs

Question 1. Donner la définition de la norme infinie sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Question 2. Donner la définition de la convergence uniforme pour une suite de fonctions.

Question 3. Énoncer le théorème de continuité pour les suites de fonctions.

Question 4. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 5. Soit α une constante réelle. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $t \mapsto (1 + t)^\alpha$.

Question 6. Déterminer l'ensemble des β réels pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Question 7. On définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x, \quad f_3 : x \mapsto \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto \sin(x).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

Première partie

Question 8. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction f à préciser.

Question 9. Soit r un élément de $]0, 1[$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, r]$ vers la fonction f.

Question 10. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de $[0, 1[$. On note ℓ sa limite.

Montrer que la suite $(f_n(a_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(\ell)$.

Deuxième partie

Question 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. On la note x_n.

Question 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n) - 1$ et en déduire l'inégalité $x_n \geqslant x_{n+1}$.

Question 13. Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer l'inégalité $x_n < 1$.

Question 14. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite.

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

Le but de cet exercice est d'obtenir un développement asymptotique de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Première partie

Question 15. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1+u}\,\mathrm{d}u$. Sa valeur est notée c.

Question 16. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que J_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{J}_n - 1 + \dfrac{1}{n}\ln(2) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{1-u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors sur $]0,1]$ la fonction $f_n : t \mapsto n \times \left(1 - u^{1/n}\right)$.

Question 18. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $u \mapsto -\ln(u)$.

Question 19. Pour tout $x \leqslant 0$, prouver la majoration $|1-\mathrm{e}^x| \leqslant |x|$.

Question 20. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $n^2\left(\mathrm{J}_n - 1 + \dfrac{1}{n}\ln(2)\right)$ tend vers c quand n tend vers $+\infty$.

Bilan

On a alors obtenu le développement asymptotique

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est de calculer la valeur de c. On donne la valeur $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Question 21. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Question 22. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u$ montrer qu'elle vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Question 23. Au moyen du théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1+u}\left(1-(-u)^n\right)\,\mathrm{d}u$ tend vers c quand n tend vers $+\infty$.

Question 24. En déduire la valeur de c.
