PC* — mathématiques **jeudi 24 novembre 2022**
Devoir surveillé n° 3 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et calculs

Question 1. Donner la définition de la norme infinie sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Question 2. Donner la définition de la convergence uniforme pour une suite de fonctions.

Question 3. Énoncer le théorème de continuité pour les suites de fonctions.

Question 4. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 5. Soit α une constante réelle. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$.

Question 6. Déterminer l'ensemble des β réels pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Question 7. On définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x, \quad f_3 : x \mapsto \cos(x), \quad f_4 : x \mapsto \sin(x).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Problème 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère un $(p+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_p)$ d'éléments de $[a,b]$ tel que $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$.

On note $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_p)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ associée à $(a_0, \ldots, a_p)$.

Pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$, on pose

$$\mathrm{N}(\mathrm{Q}) = \sum_{k=0}^{p} |\mathrm{Q}(a_k)|\,.$$

Question 8. Rappeler l'expression de polynômes de $\mathcal{L}$ et donner la valeur de $\mathrm{L}_i(a_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,p]\!]^2$.

Question 9. Rappeler, avec démonstration, l'expression d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ dans la base $\mathcal{L}$.

Question 10. Vérifier que N est une norme sur $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$.

Question 11. Soit $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$.

On suppose que la suite de fonctions $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une certaine fonction f.

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

Question 12. Soit $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$.

Montrer que $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Q sur $[a,b]$ si et seulement si elle converge vers Q au sens de la norme N.

Question 13. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Q sur $[a,b]$ si et seulement si elle converge uniformément vers Q sur $[a,b]$.

Problème 2

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme infinie. Pour tout élément f de E, on note $\mathrm{P}(f)$ la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0. On rappelle que d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $\mathrm{P}(f)$ est donnée par

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{P}(f)(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Première partie

Question 14. Justifier que P est un endomorphisme de E.

Question 15. Étudier l'injectivité et la surjectivité de P.

Question 16. Montrer que P est 1-lipschtzienne relativement à la norme infinie.

Question 17. Montrer que 1 est la constante de Lipschitz de P, c'est-à-dire la plus petite constante $k \geqslant 0$ telle que P soit k-lipschtzienne.

Question 18. On note u l'élément $x \mapsto 1$ de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la fonction $\mathrm{P}^n(u)$.

Question 19. Montrer que P^n est lipschitzienne et que sa constante de Lipschitz est minorée par $\dfrac{1}{n!}$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de prouver que la constante de Lipschitz de P^n vaut exactement $\dfrac{1}{n!}$.

On considère un élément f de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on lui associe la fonction $f_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Question 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide du binôme de Newton, prouver que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que sa dérivée est f_{n-1}.

Question 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire l'égalité $\mathrm{P}^{n+1}(f) = f_n$.

Question 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, redémontrer l'égalité $\mathrm{P}^{n+1}(f) = f_n$ en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral.

Question 23. Conclure.

Problème 3

Le but de cette partie est de donner une démonstration de l'équivalent de Stirling.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

On définit l'ensemble $\mathrm{U} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2\ ;\ t > 0 \text{ et } x > -t\}$.

On définit sur U la fonction $f : (t,x) \mapsto t^2 \ln\left(1 + \dfrac{x}{t}\right) - tx$.

Question 24. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Question 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n et calculer sa valeur.

Question 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité

$$\mathrm{I}_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\ \mathrm{d}x.$$

Question 27. Pour tout $(t, x) \in \mathrm{U}$ tel que $x \leqslant 0$, prouver la majoration $f(t, x) \leqslant -x^2/2$.

Question 28. Pour tout $x > 0$ et tout $t \geqslant 1$, prouver la majoration $f(t, x) \leqslant f(1, x)$.

Pour cela, on pourra commencer par écrire $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ sous la forme $t\mathrm{F}(x/t)$ pour une certaine fonction F que l'on étudiera.

Question 29. Démontrer finalement la formule de Stirling.
