Exercice 1. (*) Déterminer les éléments propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On donne $\chi_{\mathrm{C}} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 10\mathrm{X} + 8$ et $\chi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}^3 - 7\mathrm{X}^2 + 16\mathrm{X} - 12$.

Exercice 2. (*) On fixe un entier $n \geqslant 2$. La matrice I_n est notée I.

a. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer ses éléments propres. Est-elle diagonalisable ?

b. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on note $\mathrm{M}(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent a, les autres valant b. Montrer que $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable et calculer son déterminant.

c. Exprimer les puissances de $\mathrm{M}(a,b)$ comme combinaison linéaire de I et J

Exercice 3. (**) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f.

a. Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont exactement les valeurs propres non nulles de $\tilde{f}$.

b. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de f. Montrer alors l'égalité $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{E}_\lambda(\tilde{f})$.

Exercice 4. (*) Dans cet exercice, l'entier n est supérieur ou égal à 3. On pose $\mathrm{M} = (\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a. Déterminer le noyau de M. Qu'en déduit-on sur les éventuelles valeurs propres non nulles de M ?

b. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{MU}$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$.
Écrire la matrice de φ relativement à une base bien choisie de $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$. En déduire les éléments propres de φ.

c. Montrer que la matrice M est diagonalisable et proposer une matrice de passage.

Exercice 5. (*) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})\mathrm{P}(1) + (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})\mathrm{P}(-1)$ pour tout P dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer son noyau, son image, ses éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 6. (**) On fixe un entier n strictement positif.

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $\Phi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Déterminer les éléments propres de Φ. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 7. (*) À quelle condition la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 8. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $\mathrm{M}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathrm{M}(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs de z, que l'on déterminera. Pour cela, on cherchera les éventuelles racines multiples de son polynôme caractéristique.

Exercice 9. (*) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f n'est pas diagonalisable mais qu'il est trigonalisable.

b. On admet que f^3 est l'endomorphisme nul. Comment peut-on le montrer ?

c. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x_0)$ soit non nul.
Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Quelle est la matrice de f relativement à une telle base ? Trouver un vecteur x_0 convenable et préciser la matrice de passage associée.

Exercice 10. (**) On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose triangulaire. On suppose que les coefficients diagonaux sont donnés par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad a_{k,k} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Déterminer la matrice A^n.

Exercice 11. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair et que la trace de A est nulle. Que vaut le déterminant de A ?

Exercice 12. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les relations $\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}^2$ et $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 13. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A}$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 14. (*) Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient les égalités $\mathrm{M}^5 = \mathrm{M}^2$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = n$.

Exercice 15. (*) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{K}^n$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ et on lui associe la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est le polynôme P. Pour le calculer, on effectuera une seule opération sur les colonnes.

b. Calculer la dimension des espaces propres de A.

c. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Exercice 16. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Soit λ dans $\mathbb{C}$. Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda^2 \mathrm{I}_n)$.

b. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable et inversible.

Exercice 17. (*) Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$.

a. Montrer que M laisse stables les espaces propres de A.

b. On suppose que A est diagonalisable et que ses espaces propres sont de dimension 1. Montrer que toute base de diagonalisation de A en est une aussi pour M. Préciser les liens entre les valeurs propres de A et celles de M.

c. Résoudre l'équation $\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A}$, d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans le cas $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -30 & -24 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. (*) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer l'égalité
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2).$$

Exercice 19. (**) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f^2 est diagonalisable. On suppose aussi que l'égalité
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$$
est vraie.

Montrer alors que f est diagonalisable. Trouver un contre-exemple si on enlève cette condition.

Exercice 20. (**) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut prouver que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

a. Montrer que c'est vrai dans le cas où A est inversible.

b. On revient au cas général. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on pose $f(z) = \mathrm{dét}(\lambda \mathrm{I}_n - (\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n)\mathrm{B}) - \mathrm{dét}(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{B}(\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n))$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Montrer que f est le polynôme nul. Conclure.

Exercice 21. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables qui commutent.

Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à A et B.

Exercice 22. (***) Montrer par récurrence sur n l'énoncé suivant : pour toute famille $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux, il existe une base de diagonalisation commune à toutes les A_i.

Pour l'hérédité, on distinguera selon que les A_i sont toutes des matrices scalaires ou non.

Exercice 23. (*) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$.

Montrer que si A est diagonalisable, alors Φ_A l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 24. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable.

a. Décrire l'ensemble $\mathcal{C}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}$, appelé *commutant* de A. On montrera que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on exprimera sa dimension en fonction des dimension des espaces propres de A.

b. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 25. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède des solutions est que pour toute valeur propre λ strictement négative de A (s'il en existe), la dimension de l'espace propre associé soit paire.

Exercice 26. (*) On note E_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que E_n est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
