Exercice 1. (**) On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on introduit la matrice B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivante

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On suppose que la matrice B est diagonalisable. Le but de cet exercice est de prouver, par deux méthodes, que la matrice A est forcément nulle.

1. Pour tout λ dans $\mathbb{C}$, comparer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_{2n})$ et celle de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$.
En déduire que A est nulle.

2. Pour cette deuxième méthode, on introduit un polynôme annulateur de B, noté P, que l'on suppose scindé, à racines simples.

a. Démontrer l'égalité $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{AP}'(\mathrm{A}) \\ 0 & \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{pmatrix}$.

b. Montrer que la matrice $\mathrm{P}'(\mathrm{A})$ est inversible.

c. Conclure.

Exercice 2. **Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton (**)**

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non trivial de dimension finie et un endomorphisme u de E.

On fixe provisoirement un vecteur x_0 non nul de E.

a. On note $\mathrm{I}(x_0)$ l'ensemble des entiers naturels k tels que la famille $(u^i(x_0))_{0 \leqslant i \leqslant k}$ soit libre.
Montrer que l'ensemble $\mathrm{I}(x_0)$ possède un plus grand élément, que l'on note m dans la suite.

On note $\mathcal{F}$ la famille $(u^i(x_0))_{0 \leqslant i \leqslant m}$ et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. La famille $\mathcal{F}$ est alors une base de cet espace vectoriel.

b. Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ de $\mathbb{K}^{m+1}$ tel que la relation suivante soit vérifiée

$$u^{m+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i u^i(x_0).$$

En déduire que le sous-espace vectoriel F est stable par l'endomorphisme u.

On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.

c. Écrire la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $\mathcal{F}$ de F et calculer son polynôme caractéristique $\chi_{\tilde{u}}$.

d. Montrer que le vecteur $\chi_{\tilde{u}}(u)(x_0)$ est nul.

e. Montrer que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

f. Redémontrer cette propriété par un calcul direct dans le cas où E est de dimension 2.

Exercice 3. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie.

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f.

Exercice 4. (***) Pour tout entier n strictement positif, montrer la propriété (H_n) dont l'énoncé est « pour tout espace vectoriel réel E de dimension n, pour toute famille d'endomorphismes de E tous diagonalisables qui commutent entre eux, il existe une base de E dont les vecteurs sont des vecteurs propres pour tous les endomorphismes de cette famille ».
On raisonnera bien sûr par récurrence sur n ; au moment de l'hérédité, on commencera par évacuer le cas où tous les endomorphismes sont des homothéties.

Exercice 5. **Rayon spectral d'une matrice carrée (**)**

Pour tout ce problème, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(\mathrm{A})$ son *rayon spectral*, défini par $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|z|\ ;\ z \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}$.

Pour toute matrice colonne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. On rappelle que l'application $||\ ||_\infty$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour toute matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

---

1. Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Pour toute matrice colonne x dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer la majoration $||\mathrm{A}x||_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})||x||_\infty$.

b. Montrer l'égalité $\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) = \max\limits_{\substack{x\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ x\neq 0}} \dfrac{||\mathrm{A}x||_\infty}{||x||_\infty}$.

c. Montrer l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})$.

3. Montrer que N_∞ est une norme matricielle, ce qui signifie ceci

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \qquad \mathrm{N}_\infty(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(\mathrm{A})\mathrm{N}_\infty(\mathrm{B}).$$

4. Pour toute matrice Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on note N_Q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{N}_\mathrm{Q} : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{N}_\infty(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}).$$

a. Montrer que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Pour chaque matrice Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence d'une constante réelle C_Q strictement positive vérifiant

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \frac{1}{\mathrm{C}_\mathrm{Q}}\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}_\mathrm{Q}(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{C}_\mathrm{Q}\mathrm{N}_\infty(\mathrm{A}).$$

5. On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer l'existence de $s \in \,]0, +\infty[$ tel qu'en notant D_s la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients diagonaux $s, s^2, \dots, s^n$ (dans cet ordre), on ait la relation suivante

$$\mathrm{N}_{\mathrm{D}_s}(\mathrm{T}) \leqslant \rho(\mathrm{T}) + \varepsilon.$$

b. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que l'inégalité $\mathrm{N}_\varepsilon(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon$ ait lieu.

6. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(\mathrm{A})$ est strictement inférieur à 1.
