**Exercice 1. (*)** On définit une suite $(\mathrm{P}_n)$ de fonction sur $[0,1]$ en prenant pour $\mathrm{P}_0$ la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}.$$

Pour tout $x$ dans $[0,1]$, on définit aussi la fonction $g_x : t \mapsto t + (x - t^2)/2$.

On remarque alors la relation de récurrence $\mathrm{P}_{n+1}(x) = g_x(\mathrm{P}_n(x))$.

**Question 1.** Dresser le tableau de variations de $g_x$ sur $[0,1]$.

**Question 2.** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que tous les termes de la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$ et que cette suite est décroissante.

En déduire que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ et préciser sa limite simple.

**Question 3.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, obtenir l'identité

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}'_n(x)(1 - \mathrm{P}_n(x)).$$

**Question 4.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction $\mathrm{P}_n$ est croissante sur $[0,1]$.

**Question 5.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et tout $x$ dans $[0,1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

**Question 6.** Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

---

**Exercice 2. (***)** On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

Pour tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on pose

$$||u|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}.$$

Pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$, on considère la suite $\delta_i = (\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i. \end{cases}$$

On note $\mathrm{E}_0$ l'ensemble des suites réelles de limite nulle. On rappelle que c'est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

**Question 7.** Montrer que $||\ ||$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

**Question 8.** Montrer que N est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

**Question 9.** Pour toute suite $u$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{R})$, prouver l'inégalité $\mathrm{N}(u) \leqslant 2||u||$.

**Question 10.** Montrer que la suite de suites $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle pour la norme N.

**Question 11.** Montrer que la suite de suites $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est divergente relativement à la norme $||\ ||$. Pour cela, on raisonnera par l'absurde en supposant qu'elle converge et en prouvant que sa limite est forcément la suite nulle.

**Question 12.** Les normes $||\ ||$ et N sont-elles équivalentes ?

**Question 13.** Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_k = \delta_0 + \cdots + \delta_k$.

Montrer que la suite de suites $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme N vers la suite constante égale à 1.

**Question 14.** L'ensemble $\mathrm{E}_0$ est-il un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme N ?

**Question 15.** Montrer que $\mathrm{E}_0$ est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $||\ ||$.

---

**Exercice 3. (**)** On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $n$ sa dimension et on suppose qu'elle vaut au moins 2.

Pour tout couple $(u, v)$ d'endomorphismes de E, on introduit *le commutateur du couple* $(u, v)$, qui est l'endomorphisme de E défini par

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u.$$

On note $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ l'ensemble de tous les commutateurs de couples d'endomorphismes de E, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(\mathrm{E}) = \{[u, v]\ ;\ (u, v) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E}))^2\}.$$

D'autre part, on note $\mathscr{T}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la trace est nulle.

$$\mathscr{T}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})\ ;\ \mathrm{tr}(f) = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces deux ensembles sont égaux.

**1.** Montrer l'inclusion $\mathscr{C}(\mathrm{E}) \subset \mathscr{T}(\mathrm{E})$.

**2.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $f$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout élément $x$ de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.

**3.** Dans cette question et la suivante, on considère un endomorphisme $f$ de E différent de l'endomorphisme nul. On suppose que sa trace est nulle.

**a.** Montrer l'existence d'un vecteur $e_1$ de E tel que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

**b.** En déduire l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A qui représente $f$ dans cette base ait la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{X} \\ \mathrm{Y} & \mathrm{A}_1 \end{pmatrix},$$

où X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et la matrice $\mathrm{A}_1$ est un élément de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle.

**4.** On fait l'hypothèse qu'il existe des matrices U et V dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ qui vérifient l'égalité

$$\mathrm{UV} - \mathrm{VU} = \mathrm{A}_1$$

et on considère de telles matrices.

On admet — mais les 5/2 peuvent le démontrer — qu'il existe $\alpha$ dans $\mathbb{C}$ tel que la matrice $\mathrm{U} - \alpha \mathrm{I}_{n-1}$ soit inversible. On considère un tel $\alpha$.

On se donne deux vecteurs colonnes R et S dans $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et on leur associe les matrices $\mathrm{U}'$ et $\mathrm{V}'$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ainsi

$$\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{U} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathrm{R} \\ \mathrm{S} & \mathrm{V} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il est possible de choisir le couple $(\mathrm{R}, \mathrm{S})$ de telle sorte que l'égalité $\mathrm{A} = \mathrm{U}'\mathrm{V}' - \mathrm{V}'\mathrm{U}'$ soit vérifiée.

**5.** Montrer maintenant l'inclusion $\mathscr{T}(\mathrm{E}) \subset \mathscr{C}(\mathrm{E})$.

Pour cela, on raisonnera par récurrence en rédigeant les choses soigneusement et prudemment.

---

**Exercice 4. (*)** Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ deux applications linéaires et on suppose qu'elles vérifient les égalités

$$g \circ f \circ g = g \qquad \text{et} \qquad f \circ g \circ f = f.$$

**a.** Montrer les égalités $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

**b.** Prouver que $g \circ f$ est un projecteur et en déduire que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

**c.** Prouver que $f$ et $g$ ont le même rang.

---

**Exercice 5. (*)** Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Prouver l'équivalence

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v) \iff \mathrm{F} = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

---