

# Chapitre 10 — intégrales dépendant d'un paramètre

## 1 Rappel : théorème de convergence dominée

Soit  $(f_n)_{n \geq n_0}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$ . On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux.
2. Il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  (et indépendante du paramètre  $n$ ) vérifiant la domination

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions  $f_n$  et la fonction  $f$  sont intégrables sur  $I$  et que la suite de terme général  $\int_I f_n$  converge vers  $\int_I f$  (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

## 2 Théorème de continuité sous l'intégrale

Soient  $A$  et  $I$  deux intervalles (l'intervalle  $A$  est l'ensemble des paramètres; l'intervalle  $I$  est celui sur lequel on intègre). Soit  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ . On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout  $t$  dans  $I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ .
2. Pour toute valeur du paramètre  $x$  dans  $A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
3. Il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  et indépendante du paramètre  $x$  vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors on peut affirmer que la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est (définie et) continue sur  $A$ .

Version assouplie : on peut se contenter de prouver que  $F$  est et continue sur chaque segment inclus dans  $I$ .

Exemple : la fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

## 3 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soient  $A$  et  $I$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a$  une borne de  $A$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ . Soit  $\ell$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ .

On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout  $t$  dans  $I$ ,  $f(x, t)$  tend vers  $\ell(t)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .
2. Pour toute valeur du paramètre  $x$  dans  $A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
3. Il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  et indépendante du paramètre  $x$  vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $\ell$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_I f(x, t) dt$  tend vers  $\int_I \ell(t) dt$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Exemple (question 1 du sujet X-ENS PC 2014) : montrer que  $\int_0^d x e^{-tx} g(t) dt$  tend vers  $g(0)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## 4 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Soit  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ . On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour toute valeur du paramètre  $x$  dans  $A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle  $I$ .
2. Pour tout  $t$  dans  $I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $A$ .
3. Pour tout  $x$  dans  $A$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $I$ .
4. Il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle  $I$  (et indépendante du paramètre  $x$ ) vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $A$  et sa dérivée s'obtient en dérivant sous l'intégrale

$$\forall x \in A, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Version assouplie : on peut se contenter de montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment  $K$  inclus dans  $I$ .

Généralisation aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Exemple de la fonction  $\Gamma$  (méthode par récurrence).

## 5 Théorème de dérivation sous l'intégrale, version étendue

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ . On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout  $t$  dans  $I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur l'intervalle  $A$ .
2. Pour toute valeur du paramètre  $x$  dans  $A$ , pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle  $I$ .
3. Pour tout  $x$  dans  $A$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $I$ .
4. Il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle  $I$  (et indépendante du paramètre  $x$ ) vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur l'intervalle  $A$  et ses  $k$  premières dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \forall x \in A, \quad F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$

## Programme de colles n° 9 (du lundi 16 au vendredi 27 janvier 2023)

Tout ce chapitre.

Pas de questions de cours imposées (les théorèmes sont de toute façon à connaître pour espérer aborder les exercices).