Exercice 1. (*) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2 x}}{n^2+1}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. (*) Pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on pose $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x^2}{k^2}\right)$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue. Pour cela, on se ramènera à l'étude d'une série de fonctions.

Exercice 3. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On note f la somme de cette série de fonctions.

b. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

c. Converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$?

d. La fonction f est-elle continue sur $[0, +\infty[$? est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. (**) On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

c. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 5. (**) On pose

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}.$$

a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

c. On se propose de prouver que la fonction f n'est pas dérivable en 0. On raisonne par l'absurde en supposant que f est dérivable en 0.

Prenons N dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 0$, prouver l'inégalité

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre x vers 0 par valeurs strictement positives ? Conclure.

d. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6. (*) Pour tout (n,p) de $\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (\ln(t))^p \, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que ces intégrales existent.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout p dans $\mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $\mathrm{I}(n,p)$ et $\mathrm{I}(n,p-1)$.

c. En déduire une expression explicite de $\mathrm{I}(n,p)$.

d. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

e. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Exercice 7. (**) Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{ch}(x)} \, \mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8. (**) Soit $t \in \mathbb{R}$. On veut prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+n^2}$.

a. Première méthode. Passer par les sommes partielles avec le théorème de convergence dominée.

b. Deuxième méthode. Appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Sous l'hypothèse $t > 0$, on écrira

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)| \, \mathrm{e}^{-ku} \, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)| \, \mathrm{e}^{-ku} \, \mathrm{d}u + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)| \, \mathrm{e}^{-ku} \, \mathrm{d}u.$$

et on majorera $|\sin(tu)|$ par 1 ou $|tu|$ selon ce qui est le plus pertinent.

Exercice 9. (**) On considère une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ absolument convergente et on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 10. (**) On pose $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1) \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et calculer sa somme.

Préciser ensuite le rayon de convergence de cette série entière.
