PC* — mathématiques **jeudi 5 janvier 2023**
Devoir surveillé n° 4 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et calculs

Question 1. Donner la définition de la norme infinie sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Question 2. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable.

Question 3. Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f, qu'en déduit-on quant à ses valeurs propres ?

Question 4. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 5. Rappeler la définition d'une matrice de Vandermonde et donner (sans démonstration) la valeur de son déterminant.

Question 6. Rappeler l'ensemble des α réels pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente et calculer sa valeur en cas d'existence.

Problème 1 — endomorphismes et matrices de rang 1

Partie I — endomorphismes de rang 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On pose $n = \dim(\mathrm{E})$ et on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

On considère un endomorphisme u de E et on suppose que le rang de u est égal à 1.

Question 7. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$?

Question 8. Que peut-on en déduire quant à la multiplicité de 0 en tant que valeur propre de u ?

Question 9. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{tr}(u))$.

Question 10. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.

Question 11. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{tr}(u)$ n'est pas nul. Montrer que l'espace propre de u associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(u)$ est égal à $\mathrm{Im}(u)$.

Partie II — matrices de rang 1

Dans cette partie, la lettre n désigne de nouveau un entier supérieur ou égal à 2.
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Question 12. À l'aide des résultats de la première partie, donner le polynôme caractéristique de J et justifier que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 13. Déterminer une base de chaque espace propre de la matrice J.

Question 14. En déduire une matrice P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$ soit diagonale et préciser la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$.

Question 15. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux valent a et les autres coefficients valent b.

Exprimer M comme combinaison linéaire de I et J puis calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

Question 16. En déduire une expression factorisée de $\mathrm{dét}(\mathrm{M})$.

Question 17. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la matrice M soit inversible.

Problème 2 — polynômes de Legendre

On fixe un entier n strictement positif. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit un polynôme $\phi(P)$ par la formule

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $U_k = (X^2-1)^k$ et on pose $L_k = \dfrac{1}{k!\,2^k}U_k^{(k)}$. Le coefficient dominant du polynôme L_k est noté a_k.

On introduit la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I — éléments propres

Question 18. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\deg(L_k)$ et préciser la valeur de a_k.

Question 19. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 20. Écrire la matrice de ϕ relativement à la base $\mathcal{C}$.

Question 21. En déduire le spectre de ϕ et justifier que ϕ est diagonalisable. Préciser la dimension de ses espaces propres.

Question 22. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, vérifier l'égalité $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Question 23. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Dériver $(k+1)$ fois dans la relation de la question précédente et en déduire la relation

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0.$$

Question 24. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, en déduire que le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ, en précisant la valeur propre associée.

Question 25. Déterminer les espaces propres de ϕ.

Question 26. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser la matrice de ϕ relativement à cette base.

Partie II — racines des polynômes de Legendre

Question 27. Calculer L_1, L_2, L_3 et vérifier que ces polynômes sont scindés sur $\mathbb{R}$, à racines simples, et que leurs racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Question 28. Soit un entier $k \geqslant 2$. Donner les racines de U_k en précisant leurs multiplicités et rappeler ce que ça implique sur les dérivées successives de U_k.

Question 29. Soit un entier $k \geqslant 2$. En raisonnant par récurrence au moyen du théorème de Rolle, justifier que pour tout entier $j \in [\![0, k]\!]$, le polynôme $U_k^{(j)}$ possède au moins j racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Question 30. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, justifier que L_k est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, et que ses racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Partie III - lien avec un produit scalaire

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

Question 31. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 32. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, justifier l'égalité

$$\langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt$$

puis $\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle$.

Question 33. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.