Chapitre 12 — dénombrabilité et sommabilité

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définition et exemples

Définition d'un ensemble dénombrable : c'est un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.
Exemples : l'ensemble $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs, toute partie infinie de $\mathbb{N}$.
Tout ensemble infini qui s'injecte dans $\mathbb{N}$ est dénombrable. Exemples : les ensembles $\mathbb{N}^k$ et $\mathbb{Q}$.
Tout produit fini ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.
Toute union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

1.2 Exemples d'ensembles non dénombrables

L'ensemble $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}$.

2 Familles sommables

2.1 Somme d'une famille de nombres positifs

Étant donné une famille $x = (x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, on note

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$$

la borne supérieure de l'ensemble $\left\{\sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \ ;\ \mathrm{J} \in \mathcal{P}_f(\mathrm{I})\right\}$, où $\mathcal{P}_f(\mathrm{I})$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Le *support* de la famille x est l'ensemble $\{i \in \mathrm{I} \ ;\ x_i > 0\}$.
Pour que la somme $\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$ soit finie, il est nécessaire que le support de x soit fini ou dénombrable.
Pour cette raison, on suppose dans la suite que I est un ensemble fini et dénombrable.

Théorème admis : étant donné une énumération $\{\varphi(n) \ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ de I, la somme $\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i$ est finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ converge, auquel cas on a l'égalité

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}.$$

En particulier, la somme de cette série ne dépend pas du choix de l'énumération φ de I.

Contre-exemple dans le cas semi-convergent : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sommation par paquets : pour toute décomposition $\mathrm{I} = \bigcup_{i\in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ comme union disjointe dénombrable, on a l'égalité

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in \mathrm{I}_n} x_i\right).$$

Cas particuliers importants

$$\sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}\right).$$

Produit de deux sommes. Produit de Cauchy. Sommes indexées par $\mathbb{Z}$.

2.2 Sommabilité d'une famille de nombres complexes

Dire qu'une famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de nombres complexes est *sommable* signifie que $\sum_{i\in\mathrm{I}} |x_i| < +\infty$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{I}$ une énumération.
Théorème admis : la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ converge absolument.
La somme de cette série ne dépend donc pas du choix de φ et on la note $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i$. C'est la *somme* de la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.
Dans ce cas, on a de plus l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} |x_i| .$$

Critère de domination : si pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a la majoration $|x_i| \leqslant y_i$, alors la sommabilité de la famille $(y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ implique celle de la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Linéarité, croissance, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes, produit de Cauchy.

Exercice 1. (*) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)$.

Exercice 2. (*) Soit $p \in]0,1[$. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Calculer la somme de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice 3. (*) Soit $\alpha > 1$.

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et calculer sa somme à l'aide de la fonction ζ.

Pour cela, on regroupera les couples (i,j) par paquets dans lesquels $i+j$ est une constante.

Exercice 4. (**) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que la famille $(z^{ab})_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et trouver une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendante de z telle que

$$\sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2} z^{ab} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n.$$

Exercice 5. (**) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}\right)$.
