Problème 1 (**)

Pour tout x dans $]1,+\infty[$, on note

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On a vu en classe que $\zeta(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1. Le but de ce problème est d'obtenir le terme suivant dans le développement asymptotique.

Pour tout x dans $[1,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

En cas d'existence, on pose

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Question 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

À l'aide de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} (m_n - m_{n-1})$, justifier que la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ (c'est la *constante d'Euler*).

Question 2. Montrer l'existence de $\mathrm{U}(1)$ et exprimer sa valeur à l'aide de γ.

Question 3. Pour tout x dans $]1,+\infty[$, montrer l'existence de $\mathrm{U}(x)$ et exprimer sa valeur à l'aide de $\zeta(x)$.

Question 4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. On fixe x dans $[1,2]$. Pour tout t dans $[n,n+1]$, prouver l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{x}{n^{x+1}}.$$

b. En déduire un majorant de $||u_n||_\infty^{[1,2]}$.

Question 5. Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur le segment $[1,2]$.

Question 6. Prouver que la fonction U est continue sur le segment $[1,2]$.

Question 7. Prouver que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ possède une limite finie quand x tend vers 1 et exprimer cette limite en fonction de γ.

Problème 2 (***)

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x).$$

Question 8. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée f.

Question 9. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Question 10. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul.

Problème 3 : autour de la fonction Gamma (**)

Pour tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $]0,+\infty[$, on pose $\mathrm{B}_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\ \mathrm{d}y$.

Question 11. Montrer rapidement que les nombres $\Gamma(x)$ et $\mathrm{B}_n(x)$ sont bien définis.

Question 12. Pour tout x dans $]0,+\infty[$, établir un lien entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Question 13. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, établir un lien entre $\mathrm{B}_n(x)$ et $\mathrm{B}_{n-1}(x+1)$.

En itérant cette relation, obtenir une expression explicite de $\mathrm{B}_n(x)$.

Question 14. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, vérifier la relation $\mathrm{B}_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$.

Question 15. Soit x dans $]0,+\infty[$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ \mathrm{d}t.$$

En déduire la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Question 16. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Sa limite sera notée γ.

Question 17. Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$.

Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $v : x \mapsto \dfrac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$.

Question 18. En déduire la relation suivante

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[, \qquad \ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

Question 19. Prouver que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et prouver l'identité

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

En particulier, que vaut $\Gamma'(1)$?

Question 20. On admet la formule suivante, issue de la théorie des séries de Fourier, que nous n'avons plus au programme

$$\forall x \in\ ]0,1[, \qquad \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Pour tout x dans $]0,1[$, prouver l'identité $\Gamma(x)\times\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ (connue sous le nom de *formule des compléments*).