Chapitre 13 — séries entières

1 Séries entières

1.1 Définition

Définition. Mise au point sur les notations.
Exemples : série géométrique, série exponentielle, séries lacunaires.

1.2 Domaine de convergence

Définition. Exemples : $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n!\, z^n$, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum \frac{z^n}{n}$.
Notion de fonction développable en série entière.

2 Rayon de convergence

2.1 Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n(z_0)^n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée, alors, pour tout z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2.2 Rayon de convergence

Définition : le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$ est la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des ρ positifs tels que la suite $(a_n\rho^n)_{n\geqslant n_0}$ soit bornée.
Remarque : les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
Exemple de référence : pour toute constante réelle α, le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha\, z^n$ vaut 1.

Conséquences du lemme d'Abel : si R est le rayon de convergence, alors la série entière converge absolument en tout point du disque ouvert de rayon R et diverge grossièrement en tout point extérieur au disque fermé de rayon R.
Réciproquement, si R est un nombre vérifiant les propriétés ci-dessus, alors c'est le rayon de convergence.

Caractérisations : le rayon de convergence est la borne supérieure dans $[0, +\infty[$ de l'ensemble des ρ positifs tels que la suite $(a_n\rho^n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0 ; c'est aussi la borne supérieure dans $[0, +\infty[$ de l'ensemble des ρ positifs tels que la série $\sum a_n\rho^n$ converge ; c'est aussi la borne supérieure dans $[0, +\infty[$ de l'ensemble des ρ positifs tels que $\sum a_n\rho^n$ converge absolument.

2.3 Relations de comparaison

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Idem dans le cas $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.
Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$. Exemple : $\sum \pi^{\sqrt{n^2+n}} z^n$.

2.4 Série dérivée

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
Remarque : la même démonstration fonctionne avec $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$.

Point méthode : si on a un encadrement du type $n^\alpha \leqslant |a_n| \leqslant n^\beta$, on peut facilement justifier que le rayon de convergence vaut 1.

Exemples des cas $a_n = n^{(-1)^n}$ et $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

2.5 Règle de d'Alembert

Rappel de la règle de d'Alembert sur les séries numériques.

Cas des séries lacunaires : exemples $\sum n!\, z^{n^2}$.

Cas où c'est inopérant : exemples $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et $\sum \sin(n) z^n$.

2.6 Somme de deux séries entières

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vaut alors au moins $\min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$, avec égalité si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$.

2.7 Produit de Cauchy

Cas des séries entières.
Exemple : produit de Cauchy d'une série géométrique avec elle-même.

3 Fonctions développables en série entière

Dans ce paragraphe, la variable est réelle.

3.1 Convergence normale

Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence (et sur le disque ouvert de convergence, mais ce résultat est admis).

3.2 Primitivation

Primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.

3.3 Dérivation

Les sommes de séries entières sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle ouvert de convergence. De plus, toutes les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme et toutes les séries dérivées ont le même rayon de convergence.
Expression des coefficients.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.4 Fonction développable en série entière

Définition.
Formule de Taylor. Unicité du développement en série entière en cas d'existence.
Lien avec la formule de Taylor avec reste intégral.
Exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière.

3.5 Propriétés algébriques

Stabilité par combinaison linéaire, par produit.
Partie paire, partie impaire. Partie réelle, partie imaginaire.

3.6 Développement en série entière des fonctions usuelles

Fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ (pour n'importe quelle constante α complexe), cosinus et sinus hyperboliques, cosinus et sinus.
Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$.
Point méthode : pour l'exponentielle et la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, on trouve le rayon de convergence de la série de Taylor et on trouve une équation différentielle vérifiée par sa somme.

Programme de colles n° 11 (du lundi 27 février au vendredi 10 mars 2023)

Tout ce chapitre.

Pas de questions de cours imposées, mais les exercices devront bien sûr tester la connaissance des développements en série entière des fonctions usuelles.
