Chapitre 15 — probabilités

1 Espaces probabilisés

1.1 Tribu

Une *tribu* sur un ensemble Ω est un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui possède Ω pour élément, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

Propriétés : $\varnothing \in \mathscr{A}$, stabilité par intersection dénombrable, stabilité par réunion finie, stabilité par intersection finie.

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.

Un *espace probabilisable* est un couple d'ensembles $(\Omega, \mathscr{A})$ tel que $\mathscr{A}$ soit une tribu sur Ω. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés *événements*.

Système complet d'événements dénombrable.

1.2 Probabilité sur un espace probabilisable

Une *probabilité* sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ est une fonction $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs réelles positives, telle que $\mathbb{P}(\Omega)$ soit égal à 1 et telle que la relation

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$$

soit valable pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux incompatibles (propriété de *σ-additivité*).

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est alors un *espace probabilisé*.

Les formules présentées dans le cas d'un espace probabilisé fini demeurent vraies dans ce contexte.

Continuité croissante. Si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

Continuité décroissante. Si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

Sous-additivité. Si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

Événement presque sûr. Événement négligeable. Système quasi complet d'événements.

1.3 Conditionnement et indépendance

Définition de $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$, également notée $\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A})$, dans le cas où $\mathbb{P}(\mathrm{B})$ est non nul. La fonction $\mathbb{P}_\mathrm{B}$ est alors une probabilité sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A})$.

Formule des probabilités composées.

Formules des probabilités totales

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

Formule de Bayes.

Indépendance de deux événements. Si $\mathbb{P}(\mathrm{B})$ n'est pas nul, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})$.

Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements. L'indépendance des événements deux par deux ne suffit pas s'il y a au moins trois événements.

Conservation de l'indépendance par passage au complémentaire.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Variable aléatoire discrète

Une *variable aléatoire discrète* X sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ est une fonction définie sur Ω telle que l'univers image $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et telle que pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ soit un élément de $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire un événement).

Pour toute partie U de l'univers image $X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(U)$ est un événement.

L'événement $X^{-1}(U)$ est noté $[X \in U]$ ou $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.

Stabilité par combinaison linéaire et par produit. Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est une variable aléatoire.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.

La notation $X \sim Y$ signifie que les variables aléatoires X et Y suivent la même loi.

Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Loi géométrique. Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Loi de Poisson. Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

2.3 Couple de variables aléatoires discrètes

Loi conjointe. Lois marginales.

Loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Loi de $X + Y$.

Si (X, Y) et (U, V) suivent la même loi, alors $f(X, Y)$ et $f(U, V)$ suivent la même loi. Cas de la somme et du produit.

2.4 Indépendance

Dire que les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* signifie que pour pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

L'indépendance de X et de Y équivaut à l'identité

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Loi de $X + Y$. Cas de la loi de Poisson. Cas de la loi géométrique.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient bien définies, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Loi conjointe d'un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variable aléatoires. Variable aléatoire de la forme $f(X_1, \dots, X_n)$.

Variables aléatoires mutuellement indépendantes. Suites de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Jeu de pile ou face infini.

Loi de $\max(X_1, \dots, X_n)$.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Exemples de généralisations.

3 Moments

3.1 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0, +\infty]$ est l'élément $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Dans le cas où X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, identité

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Cas des lois de Poisson et des lois géométriques.

Pour une variable aléatoire discrète complexe X, dire que X est *d'espérance finie* signifie que la famille $(x\,\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est la somme de cette famille.
Variable aléatoire centrée.

Formule du transfert : la variable aléatoire est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\,\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X = x).$$

L'existence de $\mathbb{E}(X)$ équivaut à ce que $\mathbb{E}(|X|)$ soit finie.

Critère de domination : si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie aussi.
Positivité. Croissance de l'espérance.
Si X est positive et $\mathbb{E}(X) = 0$, alors X est presque sûrement nulle.

La formule du transfert s'applique aussi aux couples de variables aléatoires pour calculer $\mathbb{E}(f(X, Y))$.

Cas de $\mathbb{E}(X + Y)$: linéarité de l'espérance.
Cas de $\mathbb{E}(XY)$. Dans le cas où X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, la variable aléatoire XY est d'espérance finie et on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Généralisation au produit de n variables aléatoires indépendantes.

3.2 Variance et covariance

Dans ce paragraphe, les variables aléatoires sont discrètes et à valeurs réelles.
Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{X}^2\mathcal{Y}^2$.
Le cas d'égalité équivaut à ce que X et Y soient presque sûrement proportionnelles.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète X telle que X soit d'espérance finie.
Identité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Identité $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. Variable réduite.
Covariance. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Variance d'une somme finie. Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

3.3 Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières

La *série génératrice* d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Le rayon de convergence vaut au moins 1 et la série entière ci-dessus converge normalement sur $[-1, 1]$. La *fonction génératrice* de X est alors la fonction

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Cette fonction est continue sur $[-1,1]$ et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
L'égalité $G_X = G_Y$ équivaut à ce que X et Y aient la même loi.
L'existence de $\mathbb{E}(X)$ équivaut à la dérivabilité de G_X en 1. Dans ce cas, l'espérance de X vaut $G_X'(1)$.
Dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1, on remarque qu'on peut calculer l'espérance de X^2 au moyen de $G_X''(1)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

Fonction génératrice G_{X+Y} dans le cas où X et Y sont indépendantes. Généralisation.

4 Lois usuelles

4.1 Loi géométrique

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. Fonction génératrice, espérance et variance.
Elle modélise le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire. Si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

Réciproquement, on suppose que X est à valeurs entières, que X vérifie l'inégalité ci-dessus et que $\mathbb{P}(X = 1) > 0$. Alors X suit une loi géométrique.

4.2 Loi de Poisson

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Fonction génératrice, espérance et variance.
Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson. Généralisation.

4.3 Complément : loi binomiale négative

Loi de la somme $X_1 + \cdots + X_m$, où les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi $\mathscr{G}(p)$.
Interprétation : rang du m-ième succès dans une suite infinie de pile ou face.

4.4 Complément : approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $]0,1[$. Soit $\lambda > 0$. On suppose que np_n tend vers λ quand n tend vers $+\infty$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$. Alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

5 Inégalités probabilistes

5.1 Inégalités

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
Application à l'obtention d'inégalités de concentration.

5.2 Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On suppose que $(X_1)^2$ est d'espérance finie.
On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Interprétation : la moyenne expérimentale est probablement proche de la moyenne théorique.

Programme de colles n° 12 (du lundi 13 au vendredi 24 mars 2023)

Chapitres 12, 14 et 15
