

**Probabilités sur un univers fini**

**Exercice 1. (\*)** On lance  $n$  fois une pièce.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère les événements  $P_k =$  [On a fait pile au  $k$ -ième lancer.] et  $F_k =$  [On a fait face au  $k$ -ième lancer.]. Exprimer à l'aide des événements de la forme  $P_k$  et  $F_k$  les événements suivants :

- A = [On a fait pile à tous les lancers.] ;
- B = [On a fait pile à au moins un lancer.] ;
- C = [On a fait pile à au moins un lancer, mais pas au cours des deux premiers.] ;
- D = [On a fait pile pour la première fois à l'avant-dernier lancer.] ;
- E = [On n'a jamais obtenu la succession (pile, face).] ;
- F = [On a fait pile exactement une fois.] ;
- G = [On a fait pile exactement deux fois.]

**Exercice 2. (\*)** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Calculer l'espérance de  $\frac{1}{X+1}$ .

**Exercice 3. (\*)** On lance deux dés équilibrés à  $n$  faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$ , supposées indépendantes.

On pose  $X = \min(U_1, U_2)$  et  $Y = \max(U_1, U_2)$ .

- a. Déterminer la loi et l'espérance de  $X$ .
- b. Calculer  $X + Y$  en fonction de  $U_1$  et  $U_2$ . En déduire l'espérance de  $Y$ .
- c. Calculer de même  $XY$  et en déduire la covariance de  $(X, Y)$ .

**Exercice 4. (\*\*)** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On considère des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_k$  indépendantes, de loi uniforme sur l'ensemble  $\{-1; 1\}$ . On note

$$S_k = \sum_{i=1}^k U_i.$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda U_1}))$ .

- a. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , prouver l'inégalité  $\varphi(\lambda) \leq \lambda^2/2$ .
- b. (\*\*\*) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , prouver l'inégalité  $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$ .
- c. En déduire l'inégalité de Hoeffding

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

**Exercice 5. (\*)** On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on note  $P_n$  l'événement « *Le  $n$ -ième lancer a donné pile.* » et on note  $F_n$  son événement contraire.

Pour tout entier  $n$ , on note  $D_n$  l'événement « *Lors des  $n$  premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* » La probabilité de l'événement  $D_n$  est notée  $d_n$ .

- a. Calculer  $d_0$ , ainsi que  $d_1$  et  $d_2$ .
- b. Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

- c. En déduire une expression de  $d_n$  en fonction de  $n$  puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter.

**Exercice 6. (\*)** On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession (pile, pile, face) apparaît avant qu'une succession (face, pile, pile) n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession (face, pile, pile) apparaît avant qu'une succession (pile, pile, face) n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

**a.** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on note  $N_n$  l'événement « *Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des  $n$  premiers lancers.* »

Calculer  $\mathbb{P}(N_1)$  et  $\mathbb{P}(N_2)$ .

**b.** Pour tout entier  $n \geq 3$ , prouver l'égalité  $\mathbb{P}(N_n) = 2^{-n} + d_n$ .

**c.** En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

**d.** Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

**Exercice 7. (\*)** Montrer qu'en posant  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$ . Possède-t-elle une espérance ? La variable aléatoire  $(-1)^X X$  possède-t-elle une espérance ?

**Exercice 8. (\*) a.** Montrer l'existence d'une constante  $c$  telle qu'on définit la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$  en posant  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k^3 + 1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**b.** Montrer que  $X$  possède une espérance, mais pas de variance.

**Exercice 9. (\*)** Montrer que si  $X$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , alors la valeur maximale de  $\mathbb{P}(X = k)$  est atteinte pour  $k = \lfloor \lambda \rfloor$ .

**Exercice 10. (\*)** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Prouver l'existence de  $\mathbb{E}(1/(X+1))$  et calculer sa valeur.

**Exercice 11. (\*)** Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ . Prouver l'existence de  $\mathbb{E}(1/X)$  et calculer sa valeur.

**Exercice 12. (\*\*)** Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ . On considère une variable aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $Z$  sachant  $[X = k]$  soit uniforme sur  $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$ .

**a.** Donner  $\mathbb{P}_{[X=k]}(Z = j)$  pour tout  $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .

**b.** Déterminer la loi de  $Z$  (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

**c.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbb{E}(Z|X = k)$  l'espérance de  $Z$  pour la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_{(X=k)}$ .

Justifier l'égalité  $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Z|X = k)\mathbb{P}(X = k)$ .

**d.** En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(Z)$ .

**Exercice 13. (\*)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $Z$  le maximum des nombres  $X$  et  $Y$ . On pose  $S = X + Y$  et  $D = X - Y$ .

**a.** Justifier que  $Z$  est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.

**b.** Déterminer les lois de  $S$  et de  $D$ .

**c.** Les variables aléatoires  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 14. (\*\*)** Soit  $p$  dans  $]0, 1[$ . Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ .

a. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , déterminer la fonction génératrice de  $S_n$ . En déduire sa loi.

b. Déterminer la loi de  $T_1$  sachant  $[S_2 = k]$ . Interprétation.

c. Pour tout  $n \geq 2$ , calculer l'espérance de  $\frac{n-1}{S_n-1}$ .

**Exercice 15. (\*)** On considère deux variables  $X$  et  $Y$  indépendantes de lois respectives  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\mu)$ .

a. Montrer que  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

b. Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[X + Y = n]$ . Reconnaître une loi usuelle.

**Exercice 16. (\*)** On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Z$ . On suppose que  $Z$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  et que pour tout entier naturel  $n$  la loi de  $X$  sachant  $[Z = n]$  est  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Montrer que  $X$  suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

**Exercice 17. (\*\*)** On considère un vecteur aléatoire  $(X, Y)$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , dont l'univers image est

$$(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq i \leq j\}$$

et pour lequel il existe deux constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p \in ]0, 1[$  telles que la loi du couple  $(X, Y)$  soit donnée par

$$\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \alpha p^j.$$

1. Exprimer en fonction de  $p$  et  $\alpha$  la loi marginale de  $X$ . En déduire la valeur de  $\alpha$  en fonction de  $p$ .

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $X + 1$ . En déduire  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

4. On pose  $Z = Y - X$ . Montrer que  $Z$  a la même loi que  $X$ . En déduire l'espérance de  $Y$ .

5. Montrer que  $X$  et  $Z$  sont indépendantes. En déduire la variance de  $Y$ .

6. Pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$ , déterminer la loi de  $X$  sachant  $[Y = j]$ .

**Exercice 18. (\*)** Soit  $X$  une variable aléatoire strictement positive. prouver l'inégalité  $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$ .

**Exercice 19. (\*\*)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes, de même loi.

Prouver l'inégalité  $\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$ .

**Exercice 20. (\*\*\*)** Soient  $X_0$  et  $Y_0$  deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[[1, 6]]$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $[[1, 6]]$ .

On suppose que  $X + Y$  suit la même loi que  $X_0 + Y_0$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  suivent une loi uniforme sur  $[[1, 6]]$ .